

اهدائی خانواده مرحوم  
سید مهدی فرخ معتصم السلطنه  
کتابخانه ملی

دوره حل المسائل

بدون باضیات نمیتوان کینه فلسفه پی برد  
بدون فلسفه نمیتوان حقایق باضیات درک کرد  
بدون این دو بشر بزرگ هیچ حقیقی نایل نمیشود

تالیف

علا محسن مصاحب

(بر داد مولف)



معلم سابق دارالمعلمین مرکزی - صاحب ال علمی درجه دوم

نقدیم مقام منبع معاونت  
کتابخانه ملی

برای سالهای دوم سوم متوسطه

با نظام اصول مطالب قضایا

چاپ اول

حق طبع محفوظ و مخصوص مؤلف است



سازمان اسناد و کتابخانه ملی  
جمهوری اسلامی ایران



نویسندگان و مصنفین هر یک بهم خویش در باب لزوم بط و توسعه علوم و  
معارف مقالات و رسائل نگاشته اند چنانکه اکنون قلم فرسایی در این موضوع  
شاید مکرر و طال آور باشد زیرا برای فهم بدیهیات دلیل و برهان یا  
هلول مقال زیاد و بیجا است و فقط تذکری کافی است تا مردمان بدان متوجه  
گردند آنگاه بدو ادراک خود دریابند مطلبی را که ما نگفته گذاریم و گذاریم  
از همین بدیهیاتی است که بی دلیل و برهان تتبع و مسلم میباشند  
اما از بدیختی و خصوص عملی کردن علوم و نیاز بسیاری که از اینکار بدست میآید  
چنانکه شاید و باید نویسندگی نموده اند در صورتیکه این موضوع مهمتر است  
و باید بیشتر منظور نظر نویسندگان باشد

امروز شاگردان مدارس با زحمات طاقت فرسانی را تحمل میکنند ولی  
چون از میدان عمل نتیجه بردن دوزند وقتی از مدرسه بیرون آیند بدستی  
عاجزانه ناتوانند که مطالبی در فهم و برهم بخاطر دارند و بر روز زمان یک  
انهارا هم بدست فراموشی میدهند



هر کس باید تا آنجا که میتواند در رفع این نقص کوشش کند و سر زندان



این آب و خاک را از خطر بیچارگی و ناتوانی برماند . راه عمل را بایشان  
 نشان دهد و وسائل رسیدن بآنها برای آنها آماده و مهیا سازد .  
 یکی از علوم می که در مدارس ما بیشتر وقت عزیزش را گردان را مصروف میدهد  
 بواسطه دور بودن از عمل کثرت فایده میبخشد ریاضیات است و عجب در این است  
 که کاملترین علوم ناقصترین نتایج را میدهد . اصول ریاضی پایه و بنیان  
 زندگانی کنونی دنیا است . هر علمی که با اصول ریاضیات نزدیک شود  
 راه تحصیل میسر و در چون تمام قواعد ریاضی در آن صدق نماید بدرجه  
 کمال رسیده است . پس مقیاس و معیار هر چیزتها اینعلم شریف میباشد .  
 محصلین بواسطه عمل نمودن قضایا و قواعد ریاضی از رنج و رحمت خود سودی  
 نمی برند بآنکه در ریاضیات راه عملی کردن علوم نظری بسیار سهل و ساده است  
 و تقریباً منحصر بکل مسائل مختلفه میباشد

امروز در مملکت ما بدست ناکستی که فکرشاکردانرا بکار اندازد و بسبب مشرقت

واقعی آنها شود نادان و کمیار است زیرا ضیق وقت استادان محترم جامعه را

از اینگونه وسائل بی نصیب کرده است لذا چون محصلین از مدرسه بیرون

آیند در قیل و دلی خوانده ها را فراموش میکنند و از ناامیدی میگویند



ریاضیات بدو منجور و ... من بسنده برای آنکه خدمتی را انجام

داده باشم بر آن شدم که دوره کاملی در حل مسائل مختلفه ریاضی جمع آورم

و به محصلین که میخواهند از راه سعی و عمل نابرسند تقدیم نمایم. ضمناً

برای آنکه این دوره جامع باشد و کاملاً احتیاجات طالبان معرفت را رفع

نماید در هر قسمت بناسبت تعاریف و قضایا و قواعد لازمه اضافه گردید

و این دوره که در <sup>شامل</sup> دو بهر اژپانصد مسئله است وقتی با تعاریف

دیگر اصول ریاضی جمع باشد دوره کاملی از ریاضیات خواهد بود که احتیاجات

محصلین را بوجه اکل رفع خواهد نمود.

در پایان هر فصل هم یک مسئله تفریحی طرح و حل شده است تا برای خوانندگان

کسالت و ملالی ایجاد نشود.

در خاتمه اولاً لازم میدانم تسکرات خود را تقدیم دوست عزیزم آقای میرزا

حسینعلی خان <sup>طهرانی</sup> که بنده را بطبع این کتاب ادا داشته و از بذل و

مساعدت و همراهی در رفع نفسموده اند بنمایم تا نیا از دوست گرامی

خودم آقای سید عبداللّه خان یاضی که در تالیف این کتاب بسنده را

بعضی نکات لازمه متوجه ساخته اند تسکرتینمایم تا لثاً از ارباب بصیرت





و دانش تقاضایم که هر جا سہو یا غلطی شاہد ہنسہ مانند از نظر  
 دوزنداشتمہ مستحصرم فرمایند تا در طلبہای آیتہ در رفع آنها کوشیدہ  
 کتابی منزہ از افلاطنتہ ہم جامعہ نمایم . -

بمنہ وجودہ و کرمہ

( فلا محسن مصاحب )





# بسمه تبارک و تعالی

## فصل اول

### اجزای اعمال اصلی بر اعداد و مقادیر جبری

۱. در حل مسائلی مانند مسد ذیل: دیروز در موقع غروب حرارت  $5^{\circ}$  بود.

امروز صبح  $8^{\circ}$  کمتر شد. امروز صبح حرارت چند درجه است؟ و غیره.

مقادیر و اعدادی که کمتر از صفر بر منهاییم این مقادیر و اعداد را منفی

و اعداد بزرگتر از صفر را مثبت خوانند. برای تمییز اعداد مثبت از

منفی مقدم بر اعداد نوع اول علامت  $+$  و مقدم بر اعداد نوع دوم

علامت  $-$  را قرار میدهند و بنا بر این قرار داد از بین اعداد  $3 + 2 -$

و  $\frac{2}{5} - 5 + 2 + 3 +$  مثبت و دو عدد دیگر

منفی هستند از آنچه در ابتدا گفتیم معلوم میشود که اعداد یک بدون علامت

نوشته شوند مثبت اند چه این اعداد همانهایی هستند که در حساب دیده ایم

و آنها همه از صفر بزرگتر بوده اند. اعداد مثبت و منفی را اعداد جبری

و اعدادی را که بدون علامت نوشته شوند اعداد حسابی خوانند

و وقتی از علامت عدد جبری مفروضی صرف نظر کنیم عدد حسابی حاصل میشود



که به قدر مطلق عدد جبری منفی و منبسط است مثلاً قدر مطلق اعداد ۳+ و ۲٫۵- و ۳+۲٫۵ است و آنها باین علامت بنمایند :

$$|+۳| = ۳ \quad | - ۲٫۵ | = ۲٫۵$$

(نقطه کنید قدر مطلق ۳+ مساویست با ۳ و غیره)

۲- در جبر و مقابله اعداد را بواسطه حروف الفبای بنمایند و علامت جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باینها میباشند که در حساب ذکر شده مثلاً

مثلاً  $a+b$  مجموع دو عدد  $a$  و  $b$  ،  $\frac{a}{b}$  نمایش خارج قسمت  $a$  بر  $b$

و بالاخره  $yx$  نمایش حاصل ضرب  $yx$  است . ( اغلب بجای  $x$

نقطه استعمال می کنند مثلاً  $a \cdot b$  بجای  $a \times b$  و  $a \cdot c$  بجای  $a \times c$

$c \times b$  نوشته میشود . بالاخره در مواقعی که اشتباهی روی ندهد نقطه را

نیز حذف میکنند مثلاً بجای  $ax$  و بجای  $yx$  و  $va$  بنویسند

۳- وقتی بجای حروف چهارتی مقدار عددی قرار دهیم و حاصل را مختصر

کنیم عددی حاصل میشود که به مقدار عددی آن عبارت باز او مقدار میفرستد

برای حروف موسومست .



مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $2x$  باز  $x=3$



حل - مقدار عددی  $2x$  باز از  $x=3$  مساویست با  $2 \times 3 = 6$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $x+a$  وقتی  $x=3$ ،  $a=5$  باشد

حل - مقدار مطلوب مساویست با  $5+3=8$

مسئله - وقتی  $x=3$ ،  $y=9$  باشد  $x:y$  چند است

حل -  $x:y = 3:9 = 1:3$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی عبارات ذیل با  $x=1$

$$a=5, c=0, b=1, e=f=2$$

$$2 \times x, 2 \times a, a+x, e+f, b+c, a+b$$

$$x+f, b+f, 3a, x+e, b-x, a-f$$

$$b-f, ax, ac, ab, af, ae, xb, ef$$

جواب تدریجی: ۲، ۱۰، ۶، ۴، ۸، ۱۳، ۳، ۱۵، ۱۵، ۳

$$۷، ۳، ۶، ۵، ۵، ۴۰، ۱۰، ۱۰، ۱، ۴$$

مسئله - مطلوب است: اولاً سطح مثلثی که قاعده اش  $h$  و ارتفاعش

$h$  باشد. ثانیاً سطح مربعی بصلع  $a$  ثانیاً محیط و سطح دایره که شعاعش  $r$

باشد. رابعاً حجم مکعبی که طول خط الراسش  $a$  باشد خامساً سطح کره شعاعش  $r$



جواب تریب  $\frac{6h}{4}, a^2, 2\pi a, \pi a^2, a^3, 4\pi a^2$   
مسئله - متحرکی در ثانیه  $v$  متر حرکت میکنند پس از  $t$  روز چند حرکت کرد؟

جواب  $86400 \times v \times t$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $x^2$  ۳۰ بار  $x=2$

$$\text{حل - } 3 \times x^2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $x^2 + 2x + 1$  ۱۰ بار  $x=1$

$$\text{حل - مقدار مطلوب مساویست با: } 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی هر یک از عبارات ذیل با  $x=1$

$$x^2 + 3, 2x + 1, 3x + 5, x^2 - 1, x^2 + 1, 4x^2$$

جواب تریب ۶، ۲، ۰، ۸، ۳، ۴

۴ - جمع اعداد جبری - بنا بر تعریف، اولاً مجموع چند عدد جبری

متحد علامه عدد جبری است که قدر مطلقش مجموع قدر مطلقهای عوامل و

علامت مشترک آنها باشد. ثانیاً مجموع دو عدد جبری مختلف علامه

عدد جبری است که قدر مطلقش تفاضل قدر مطلقهای عوامل و علامت مشترک

عدد باشد که قدر مطلقش بزرگتر است. ثالثاً مجموع چند عدد جبری



عددی است که از جمع کردن مجموع دو عدد اول و دوم با عدد سوم و جمع کردن این مجموع با عدد چهارم و تسعینا الی آخر حاصل شود .  
 ۱۵ - مسئله - تحقیق کنید که :

$$(+۴) + (+۵) = ۹ \quad , \quad (-۳) + (-۴) = -۷ \quad , \quad (+۱) + (-۳) = -۲$$

$$(+۱) + (+۱) = ۰ \quad , \quad (-۱) + (+۱) = ۰ \quad , \quad (+۷) + (-۳) = +۴ \quad , \quad (+۱) + (-\frac{۲}{۳}) = -\frac{۱}{۳}$$

$$(+۵) + (-۵) = ۰ \quad , \quad (+۵) + (-۶) = -۱ \quad , \quad (+۵) + (-۱۰) = -۵$$

$$(+۷) + (-۳) + (-۲) + ۳ = +۵ \quad , \quad ۳ + (-۲) + (۱۱) = ۱۲$$

$$(+۶) + (-۵) + (-۱۶) + (۹) = -۶ \quad , \quad (+۵) + (+۶) = ۵ + ۶$$

$$(+\frac{۱}{۴}) + (+\frac{۳}{۵}) + (-\frac{۲}{۵}) + (-\frac{۱}{۵}) + (+\frac{۱}{۵}) = -\frac{۹}{۱۰}$$

$$(+\frac{۵}{۶}) + (-\frac{۵}{۱۲}) + (-\frac{۷}{۱۰}) + (+\frac{۲}{۴۰}) + (+\frac{۱۳}{۱۶}) + (-\frac{۳}{۸}) = \frac{۷۳}{۲۴۰}$$

۵ - تفسیر - برای تفسیرتی کردن دو عدد جبری از یکدیگر کافی است علامت مفروق را تفسیر داده آنرا با مضروب و منبج جمع نماییم .

مسئله - مطلوب است تفاضل ۳ و ۲ -

حل - بنا بر قاعده فوق :  $(+۳) - (-۲) = (+۳) + (+۲) = +۵$

مسئله - مطلوب است مقدار :  $(+۱) - (+۶) \quad , \quad (-۲) - (-۳)$







$4 = (-1) + (2) + (3)$  پس مقدار عبارت مفروض مساویست با :

$$-5,5 = (4) - (5,5)$$

مسئله - عبارات ذیل را مختصر کنید :

اولاً  $-12 - 44 + 32 + 64 - 3$  ثانیاً  $-\frac{3}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$  ثالثاً  $-1 + 2 + 11$

اربعاً  $120 + 1 + 14 + 11 + 10 - 3$  خامساً  $1000 - 16 + 600 + 625 + 160 - 1$

سادساً  $1 + 64 + 225 - 27$  سابعاً  $3 - 4 + 5 - 2 + 1 - 2 + 1$

ثامناً  $5 - 6 + 4 - 5 + 3 - 2 + 1 - 2$

جواب بترتیب : صفر و  $\frac{13}{20}$  ،  $12$  ،  $11$  ،  $11$  ،  $187$  ،  $64$  .

مسئله - عبارات ذیل را مختصر کنید :

$$4 - (-2) - (-3) + 6 - 12 - 7 - 5 + 1$$

$$13 - 12 + 11 - 10 + 9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2$$

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$$

جواب بترتیب  $24$  ،  $6$  ،  $5$

مسئله - مطلوب است مقدار  $2x^2 - x$  وقتی  $x$  مساوی صفی

۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ یا ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ گردد







اجواب : صنف (

۱ - قوه - حاصل ضرب  $m$  عامل مساوی با عدد  $a$  را قوه  $m$  ام  
 آنگاه خوانند و آنرا بعلامت  $a^m$  بنمایند مثلاً قوه پنجم ۲ عبارت است از

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \text{ - قوه سوم } 5 \text{ - مساوی است با:}$$

$$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$$

مسئله - مطلوب است مقدار  $(-1)^{11}$ ،  $(-1)^{10}$ ،  $3^2$ ،  $(-2)^9$  و  $(-1)^9$

$$5^2 \text{ و } 8^4 \text{ و } (-7)^5 \text{ و } (-5)^4 \text{ و } (-9)^5 \text{ و } (-3)^9 \text{ و } 2^2 \times (-3) \text{ و}$$

$$2^2 \times (-5)^3 \text{ و } (-2)^2 \times (-9)^2 \text{ و } (-3)^2 \times (-1)^5 \text{ و } (-2)^2 \times (-5)^2$$

جواب تفریق : ۱-، ۱، ۹، ۵۱۲، -۱، ۲۵، ۴۰۹۶، ۱۶۸۰۷، -

$$۶۲۵، ۵۹۰۴۹، -۱۹۶۱۳، -۱۲، -۵۰۰، -۲۸۸، -$$

$$۹ \text{ و } -۲۰۰$$

مسئله - تحقیق کنید که :  $2 \times 3^2 + 3 \times 2^2 + 2^2 \times 3^3 - 2 \times 3 \times 7 \times 10 = 0$

حل - بدیهی است که  $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$ ،  $3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$ ،

$$2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108 \text{، } 2 \times 3 \times 7 \times 10 = 420 \text{ پس مقدار طرف اول مساوی است با:}$$

$$18 + 12 + 108 - 420 = 138 - 420 = -282$$



مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $A = x^2(y-z)^2 + y^2(x-z)^2$

بازا:  $x=2, y=1, z=-1$

$$\text{حل - } A = 2^2 \times [1 - (-1)]^2 + 1^2 \times [2 - (-1)]^2 =$$

$$= 4 \times 2^2 + 1^2 = 4 \times 4 + 1 = 16 + 1 = 17$$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $(a+b)^2 - a^2 - 2ab - b^2$

اولاً باز:  $a=1, b=2$  ثانیاً باز:  $a=3, b=4$  ثالثاً باز:

$a=-1, b=1$  رابثاً باز:  $a=-4, b=0$  خامساً باز:  $a=-5, b=-6$

جواب: در هر حالت مقدار مطلوب صفر است

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $a^2(a+b)^2 - a^2 - a^2b^2 - 2a^2b - 2a^2b^2 - 2a^2b^3$

اولاً باز:  $a=-2, b=-3$  ثانیاً باز:  $a=-5, b=4$

جواب: در هر دو حالت صفر است

مسئله - تحقیق کنید که

$$0.1095^2 - 10 \times 0.1095 \times 0.10005 + 25 \times 0.10005^2 = 0.1004525$$

$$5^4 + 6 \times 5^2 \times 2^2 + 2^4 - 4 \times 5^3 \times 2 - 4 \times 5 \times 2^3 = 11$$

$$-(16+24)^2 + (16-36)^2 + 4 \times 16 \times 36 = 0$$



$$-(9+25)^2 + (9-25)^2 + 4 \times 9 \times 25 = 0$$

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 + 11 - 12 = 0$$

$$(-4)^3 + 7(-4)^2 + 44 = 92$$

$$3 \times 13^2 + 2 \times 13^2 - 3 \times 11 - 12 = 0$$

$$2(-2)^2 - (-\frac{3}{4})(-\frac{5}{4}) + (5-4-3)^2 + 1 = 12$$

$$(-3)^2 - (5 \times 3)^2 - (-4)^3 + (\frac{15}{5^2 \cdot 3^2})^2 \times 15^2 = -151$$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $4x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6$

$$x = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$$

در هر حالت جواب صفر است مگر بازاء  $x=0$  که جواب می باشد

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $x^2 - x - 10$  بازاء  $x = -4$  و  $x = -5$

$$x = 0, x = 2, x = -2, x = -1, x = 1$$

جواب ترتیب :  $-130, -70, -10, -4, -34, -16, -10, -10$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی عبارت ذیل اولاً بازاء  $x=2, y=0, z=0$

$$x = -\frac{5}{4}, y = -6, z = 4$$

$$x = 0, y = 2, z = -\frac{1}{10}$$

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

جواب در هر حالت صفر است



۹- جذر - جذر بر عدد مانند  $a$  عددی است مانند  $\sqrt{a}$  بقسمی که

$x^2 = a$  باشد اعداد مثبت و دو جذر دارند مثلاً جذر  $۱۶$   $۴$  یا  $-۴$  است

زیرا:  $۱۶ = (-۴)^2$  و  $۱۶ = (+۴)^2$  ولی اعداد منفی جذر ندارند. جذر هر

عدد مانند  $a$  را با این صورت می‌نمایند:  $\sqrt{a}$ .

برای تعیین جذر کسر کافی است جذر صورت را بر جذر مخرج تقسیم کنیم مثلاً

$$\sqrt{\frac{9}{۱۶}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{۱۶}} = \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

مسئله - مطلوب است جذر  $۱۴$  و  $۱۱$ ،  $۲$ ،  $۴$ ،  $۱۰۰$ ،  $۱۱۹$ ،  $۲$ ،  $۱۱$  و  $۹$  و  $۸$

جواب تقریب:  $\pm ۳/۷$ ،  $\pm ۱/۴$ ،  $\pm ۲$ ،  $\pm ۹۰$ ،  $\pm ۱۰/۹$

و  $\pm ۱/۴$ ،  $\pm ۳/۳$ ،  $\pm ۳$ ،  $\pm ۲/۸$

۱- واضح است که اگر جذر عدد دیرا بقوه دوم برسانیم یعنی مجذور کنیم

آن عدد حاصل می‌شود یعنی  $(\sqrt{a})^2 = a$  یا  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

مسئله - مطلوب است مقدار  $\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۲}$ ،  $(\sqrt{۳})(-\sqrt{۳})$ ،  $\sqrt{۹/۵} \cdot \sqrt{۹/۵}$

و  $(\sqrt{۳})^2$ ،  $(\sqrt{۸})^2$ ،  $\sqrt{۱}$ ،  $\frac{۱}{۴} \times (\sqrt{۳})^2$  و  $(-\sqrt{۲})(\sqrt{۲})$  و  $\sqrt{۵} \cdot \sqrt{۵} \cdot \sqrt{۵}$

جواب تقریب:  $۲$ ،  $-۳$  و  $۵$ ،  $۹$ ،  $۳$ ،  $۸$ ،  $\pm ۱$ ،  $۱$ ،  $۴$ ،  $-۲۵$

مسئله - مطلوب است مقدار:  $x = \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$



حل - واضح است که  $1,732 = \sqrt{3}$  پس  $\frac{2,732}{0,732} = 3,7 = 1,732 + 1 = \frac{1,732+1}{1,732-1}$

مسئله - مطلوب است مقدار  $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$  (جواب ۰,۲۸)

مسئله - حساب کنید مقدار  $x = \frac{3}{7-4\sqrt{3}}$

حل - چون  $\sqrt{3} = 1,732$  پس  $x = \frac{3}{7-4 \times 1,732} = 4,18 \dots$

مسئله - مطلوب است مقدار  $x = \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}$  با  $a=5, b=8$

حل -  $x = \sqrt{5 + \sqrt{5^2 + 8^2}} = \sqrt{5 + \sqrt{36 + 64}}$

$$= \sqrt{5 + \sqrt{100}} = \sqrt{5 + 10} = \sqrt{15} = 4$$

۲- مسئله - مطلوب است اولاً مقدار  $\sqrt{10}$  ثانیاً مقدار  $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$

جواب ۱,۷۷ و ۱,۲۷۲

مسئله - بنا بر آنکه  $a=1, b=-2, c=3, d=4$  باشد مقدار عددی

$$x = \sqrt{d^2 - 4b + a^2} - \sqrt{c^2 + b^2 + a + d}$$

$$x = \sqrt{16 + 8 + 1} - \sqrt{9 - 8 + 1 + 4} = \sqrt{25} - \sqrt{6} = 1$$

مسئله - مطلوب است مقدار عبارت ذیل با  $a=13, b=14, c=15$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(c+b-a)}$$

(جواب ۱۴)



مسئله - مطلوب است مقدار عبارت ذیل اولاً بازاء  $a=1, b=-2$

ثانیاً بازاء  $a=-3, b=-5$  ثالثاً بازاء  $a=2, b=-\frac{1}{4}$

$$\sqrt{\sqrt{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}} - \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

جواب در هر حالت صفر است

مسئله - مطلوب است محاسبه  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{390625}}}$  .  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2313441}}}$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{208827064566}}}$$

جواب تقریب ۵۰۳۹ و ۲۶

مسئله - مطلوب مقدار عددی  $\sqrt{(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2} - 2xy$

اولاً بازاء  $x=y=0$  ثانیاً بازاء  $x=y=-6$  ثالثاً بازاء  $x=1,5$

$y=-5$  رابعاً بازاء  $x=7, y=-1$  خامساً بازاء  $x=-1, y=100$

(جواب در هر حالت صفر است)

۱۲۰ - مقصود از تقسیم کردن  $a$  (مقسوم) بر عدد  $b$  (مقسوم علیه) تقسین

عدد  $c$  است مثل  $c$  (خارج قسمت) که چون در  $b$  ضرب شود  $a$  حاصل گردد

از قاعده ضرب معلوم میشود که اگر  $a$  و  $b$  متحدالعلامه باشند  $c$  مثبت و اگر

متضی است تقسیمی که میتوان گفت که : خارج قسمت دو عدد جبری متحدالعلامه



(یا مختلف علامه) عددی است مثبت (یا منفی) که قدر مطلقش خارج قسمت

قدر مطلق مقسوم بر قدر مطلق مقسوم علیه باشد مثلاً  $\frac{+3}{-2} = -(\frac{3}{2}) = -1,5$

$$\frac{-a}{+b} = -(\frac{a}{b}) \quad \text{و} \quad \frac{-2}{-6} = +(\frac{2}{6}) = +\frac{1}{3}$$

مسند - مطلوب است مقدار  $\frac{+4}{+1}, \frac{-4}{-2}, \frac{-8}{3}, \frac{9}{-6}, \frac{+a}{-b}$

$$\frac{-a}{-b}, \frac{+a}{+b}, \frac{-1}{+1}, \frac{+5}{4}, \frac{3}{(-2)^2}, \frac{-6}{(-5)^2}$$

جواب برتریب:  $4, 2, -\frac{8}{3}, -\frac{2}{4}, -\frac{a}{b}, -\frac{a}{b}, -1$

$$+\frac{5}{4}, \frac{3}{125}, +\frac{6}{125}$$

مسند - مطلوب است مقدار کسر  $\frac{-a^2 + 2ab}{3a}$  با  $a=9, b=1$

$$\text{حل - مقدار مطلوب مساویست با: } \frac{-9^2 + 2 \times 9 \times 1}{3 \times 9} = \frac{18 - 81}{27} = \frac{-63}{27} = -\frac{7}{3}$$

مسند - مطلوب است مقدار عددی  $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$  آنگاه با  $x=3$

ثانیاً با  $x=0$  (جواب  $-\frac{1}{4}, -2$ )

مسند - مطلوب است مقدار عددی کسر  $\frac{(a-b)^2}{a^2 - 2ab + b^2}$  آنگاه با  $a=0, b=1$

$a=0, b=1$  ثانیاً با  $a=-2, b=3$  ثالثاً با  $a=0,5, b=1$

$b=3, a=1,2$  رابعاً با  $a=1,2, b=-3,2$  (در هر حالت جواب یک است)

مسند - اگر  $x=9,5, a=-1, b=-13$  باشد مقدار  $\frac{x^2 - b}{2x + a}$



چقدر است؟ (جواب ۹,۴۷)

مسئله - مطلوب است مقدار کسر:  $\frac{a-b}{b-a}$  اولاً بازاء  $a = +\frac{4}{3}, b =$

$\frac{5}{7}$  - ثانياً بازاء  $a = -6, b = 5$  ثالثاً بازاء  $a = 0, b = 7$

(جواب در هر حالت یک است)

مسئله - مطلوب است مقدار عبارت ذیل اولاً بازاء  $b = -5, c = -3$

$a = -1$  ثانياً بازاء  $a = -2, b = 0, c = 2$  ثالثاً بازاء  $a = 4, b = -1, c = 5$

رابعاً بازاء  $a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{5}$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

(جواب در هر حالت صفر است)

مسئله - مطلوب است مقدار  $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2} - \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$

اولاً بازاء  $a = -1, b = -5$  ثانياً بازاء  $a = -6, b = -2, 5$

ثالثاً بازاء  $a = 0, b = -\frac{6}{7}$  (جواب صفر)

مسئله - مطلوب است مقدار کسر  $\frac{x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + x}{x^2 - 4x^2 + 5x + a}$

بازاء  $x = 1, a = 1$  (جواب صفر)

مسئله - مطلوب است مقدار عبارت  $\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$



بازار  $x=3$ ,  $x=-2.5$ ,  $x=-\frac{5}{2}$ ,  $x=-7.1$ ,  $x=3$

جواب صفر است

مسئله - حساب کنید مقدار  $xy + \frac{xy}{x-y} + 29$  را بازار  $x=3$

(جواب ۱۱۸)  $y=4$ ,  $x=1$ ,  $y=100$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $\sqrt{3}xy + \sqrt{5}xz + \sqrt{2}vy$  بازار

(جواب ۸)  $x=1$ ,  $y=3$ ,  $z=5$ ,  $v=5$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $\frac{2a+b(2c-a)}{3b-\sqrt{2c^2}}$  بازار  $c=2$ ,  $b=3$ ,  $a=4$

حل - مقدار مطلوب مساویست با  $\frac{1+3 \times 5}{9-4} = \frac{1}{5}$

مسئله - مطلوب است مقدار  $a + [b - 2c - (a - b)]$  بازار  $c=3$ ,  $b=1$ ,  $a=2$

حل -  $2 + [-1 - 6 - (2 + 1)] = 2 + [-1 - 6 - 3] = 2 - 10 = -8$

مسئله - مطلوب است مقدار عبارت ذیل اولاً بازار  $a=3$ ,  $b=-2$  ثانیاً

بازار  $a=-1$ ,  $b=0$  ثالثاً بازار  $a=-1$ ,  $b=-5$  رابعاً بازار  $a=-\frac{1}{4}$ ,  $b=-\frac{1}{4}$

$2a + [3b - 6b + (2b - 2a)] + (a + b)^2 - a^2 - 2ab - b^2$

(جواب در هر حالت صفر است)

مسئله - مطلوب است مقدار عددی عبارت ذیل اولاً بازار  $x=1$



$$\frac{p^2 + q^2 - (p - q)\sqrt{p^2 + 2pq + q^2}}{2p + q - [p - (q - p)]} : q = -2,5 \quad p = -3,5 \quad \text{ثانیا باز } q = -1$$

جواب اولاً  $\frac{1}{4}$  ثانیا  $-2,5$

مسئله - تحقیق کنید که اگر  $a = \frac{25}{16}$ ,  $b = 1$ ,  $c = \frac{5}{4}$  باشد،

$$(a - \sqrt{b})(\sqrt{a} + b)\sqrt{a - b} = \frac{ce^4}{\sqrt{a - c^2}}$$

۱۳- کعب - کعب یا قوه سوم هر عدد مانند  $a$  عددی است مثل  $a$

بقسمی که  $x^3 = a$  باشد عدد  $x$  را با نموده صورت میسرند  $\sqrt[3]{a} = x$  (۱)

مثلاً  $\sqrt[3]{125} = +5$  زیرا  $(+5)^3 = 125$  و  $\sqrt[3]{-125} = -5$  چون  $(-5)^3 = -125$

اگر طرفین رابطه (۲) را کعب کنیم حاصل می شود  $x^3 = (\sqrt[3]{a})^3$  یا:

$a = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3$  برای تعیین کعب یک کسر کافی است کعب

صورت را بکعب مخرج تقسیم کنیم مثلاً  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

مسئله - مطلوب است کعب اعداد  $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1728, 2744, 3439, 4913, 8000, 12167, 17280, 24137, 32768, 43897, 58320, 77343, 100000, 121670, 156250, 196830, 241375, 291600, 349920, 418175, 496000, 584320, 684000, 795920, 919920, 1056800, 1206625, 1379600, 1575840, 1796400, 2041200, 2311200, 2606400, 2927840, 3275600, 3649800, 4050400, 4477400, 4930800, 5410600, 5916800, 6449400, 7008400, 7593800, 8205600, 8843800, 9508400, 10199400, 10916800, 11660600, 12430800, 13227400, 14050400, 14899800, 15775600, 16677800, 17606400, 18561400, 19542800, 20550600, 21584800, 22645400, 23732400, 24845800, 25985600, 27151800, 28344400, 29563400, 30808800, 32080600, 33378800, 34703400, 36054400, 37431800, 38835600, 40265800, 41722400, 43205400, 44714800, 46250600, 47812800, 49401400, 51016400, 52657800, 54325600, 56019800, 57740400, 59487400, 61260800, 63060600, 64886800, 66739400, 68618400, 70523800, 72455600, 74413800, 76398400, 78409400, 80446800, 82510600, 84599800, 86714400, 88854400, 91019800, 93210600, 95426800, 97668400, 99935400, 102227800, 104545600, 106888800, 109257400, 111651400, 114070800, 116515600, 118985800, 121481400, 123992400, 126518800, 129060600, 131617800, 134190400, 136778400, 139381800, 141990600, 144614800, 147254400, 149909400, 152579800, 155265600, 157966800, 160683400, 163415400, 166162800, 168925600, 171703800, 174497400, 177306400, 180130800, 182970600, 185825800, 188696400, 191582400, 194483800, 197399800, 200330400, 203275600, 206235400, 209209800, 212198800, 215192400, 218190600, 221193400, 224200800, 227212800, 230239400, 233270600, 236306400, 239346800, 242391800, 245441400, 248495600, 251554400, 254617800, 257685800, 260758400, 263835600, 266917400, 270003800, 273094800, 276189400, 279287600, 282389400, 285494800, 288603800, 291716400, 294832600, 297952400, 301075800, 304202800, 307333400, 310467600, 313605400, 316746800, 319891800, 323040400, 326192600, 329348400, 332507800, 335670800, 338837400, 342007600, 345181400, 348358800, 351539800, 354724400, 357912600, 361104400, 364300800, 367500800, 370704400, 373911600, 377122400, 380336800, 383554800, 386776400, 389991600, 393209400, 396429800, 399652800, 402878400, 406106600, 409337400, 412570800, 415806800, 419045400, 422286600, 425529400, 428773800, 432019800, 435267400, 438516600, 441767400, 445019800, 448273800, 451529400, 454786600, 458045400, 461305800, 464567800, 467831400, 471096600, 474363400, 477631800, 480901800, 484173400, 487446600, 490721400, 493997800, 497275800, 500555400, 503836600, 507119400, 510403800, 513689800, 516977400, 520266600, 523557400, 526849800, 530143800, 533439400, 536736600, 540035400, 543335800, 546637800, 549940400, 553244600, 556550400, 559857800, 563166800, 566477400, 569789600, 573103400, 576418800, 579735800, 583054400, 586374600, 589696400, 593019800, 596343800, 599669400, 602996600, 606325400, 609655800, 612987800, 616320400, 619654600, 622989400, 626325800, 629663800, 633003400, 636344600, 639686400, 643029800, 646374800, 649721400, 653069600, 656419400, 659770800, 663123800, 666478400, 669834600, 673191400, 676549800, 679909800, 683271400, 686634600, 690000400, 693367800, 696736800, 700107400, 703479600, 706853400, 710228800, 713605800, 716984400, 720364600, 723746400, 727129800, 730514800, 733901400, 737289600, 740679400, 744070800, 747463800, 750858400, 754254600, 757652400, 761051800, 764452800, 767855400, 771259600, 774665400, 778072800, 781481800, 784892400, 788304600, 791718400, 795133800, 798550800, 801969400, 805389600, 808811400, 812234800, 815659800, 819086400, 822514600, 825944400, 829375800, 832808800, 836243400, 839679600, 843117400, 846556800, 850007800, 853459400, 856912600, 860367400, 863823800, 867281800, 870741400, 874202600, 877665400, 881129800, 884595800, 888063400, 891532600, 895003400, 898475800, 901949800, 905425400, 908902600, 912381400, 915861800, 919343800, 922827400, 926312600, 929809400, 933307800, 936807800, 940309400, 943812600, 947317400, 950823800, 954331800, 957841400, 961352600, 964865400, 968379800, 971895800, 975413400, 978932600, 982453400, 985975800, 989499800, 993025400, 996552600, 1000081400, 1003611800, 1007143800, 1010676400, 1014210600, 1017746400, 1021283800, 1024822800, 1028363400, 1031905600, 1035449400, 1038994800, 1042541800, 1046090400, 1049640600, 1053192400, 1056745800, 1060300800, 1063857400, 1067415600, 1070975400, 1074536800, 1078099800, 1081664400, 1085230600, 1088798400, 1092367800, 1095938800, 1100000400, 1103563600, 1107128400, 1110694800, 1114262800, 1117832400, 1121403600, 1124976400, 1128550800, 1132126800, 1135704400, 1139283600, 1142864400, 1146446800, 1150030800, 1153616400, 1157203600, 1160792400, 1164382800, 1167974800, 1171568400, 1175163600, 1178760400, 1182358800, 1185958800, 1189559400, 1193161600, 1196765400, 1200370800, 1203977800, 1207586400, 1211196600, 1214808400, 1218421800, 1222036800, 1225653400, 1229271600, 1232891400, 1236512800, 1240135800, 1243759400, 1247384600, 1251011400, 1254639800, 1258269800, 1261891400, 1265514600, 1269139400, 1272765800, 1276393800, 1280023400, 1283654600, 1287287400, 1290921800, 1294557800, 1298195400, 1301834600, 1305475400, 1309117800, 1312761800, 1316407400, 1320054600, 1323703400, 1327353800, 1331005800, 1334659400, 1338314600, 1341971400, 1345629800, 1349289800, 1352951400, 1356614600, 1360279400, 1363945800, 1367613800, 1371283400, 1374954600, 1378627400, 1382301800, 1385977800, 1389655400, 1393334600, 1397015400, 1400697800, 1404381800, 1408067400, 1411754600, 1415443400, 1419133800, 1422825800, 1426519400, 1430214600, 1433911400, 1437609800, 1441309800, 1445011400, 1448714600, 1452419400, 1456125800, 1459833800, 1463543400, 1467254600, 1470967400, 1474681800, 1478397800, 1482115400, 1485834600, 1489555400, 1493277800, 1496991800, 1500707400, 1504424600, 1508143400, 1511863800, 1515585800, 1519309400, 1523034600, 1526761400, 1530489800, 1534219800, 1537951400, 1541684600, 1545419400, 1549155800, 1552893800, 1556633400, 1560374600, 1564117400, 1567861800, 1571607800, 1575355400, 1579104600, 1582855400, 1586607800, 1590361800, 1594117400, 1597874600, 1601633400, 1605393800, 1609155800, 1612919400, 1616684600, 1620451400, 1624219800, 1627989800, 1631761400, 1635534600, 1639309400, 1643085800, 1646863800, 1650643400, 1654424600, 1658207400, 1661991800, 1665777800, 1669565400, 1673354600, 1677145400, 1680937800, 1684731800, 1688527400, 1692324600, 1696123400, 1700000800, 1703879800, 1707760400, 1711642600, 1715526400, 1719411800, 1723298800, 1727187400, 1731077600, 1734969400, 1738862800, 1742757800, 1746654400, 1750552600, 1754452400, 1758353800, 1762256800, 1766161400, 1770067600, 1773975400, 1777884800, 1781795800, 1785708400, 1789622600, 1793538400, 1797455800, 1801374800, 1805295400, 1809217600, 1813141400, 1817066800, 1820993800, 1824922400, 1828852600, 1832784400, 1836717800, 1840652800, 1844589400, 1848527600, 1852467400, 1856408800, 1860351800, 1864296400, 1868242600, 1872190400, 1876139800, 1880090800, 1884043400, 1888000600, 1891959400, 1895919800, 1900000800, 1903982400, 1907965600, 1911950400, 1915936800, 1919924800, 1923914400, 1927905600, 1931898400, 1935892800, 1939888800, 1943886400, 1947885600, 1951886400, 1955888800, 1959892800, 1963898400, 1967905600, 1971914400, 1975924800, 1979936800, 1983950400, 1987965600, 1991982400, 1995999800, 2000017800, 2004037400, 2008058600, 2012081400, 2016105800, 2020131800, 2024159400, 2028188600, 2032219400, 2036251800, 2040285800, 2044321400, 2048358600, 2052397400, 2056437800, 2060479800, 2064523400, 2068568600, 2072615400, 2076663800, 2080713800, 2084765400, 2088818600, 2092873400, 2096929800, 2100987800, 2105047400, 2109108600, 2113171400, 2117235800, 2121301800, 2125369400, 2129438600, 2133509400, 2137581800, 2141655800, 2145731400, 2149808600, 2153887400, 2157967800, 2162049800, 2166133400, 2170218600, 2174305400, 2178393800, 2182483800, 2186575400, 2190668600, 2194763400, 2198859800, 2202957800, 2207057400, 2211158600, 2215261400, 2219365800, 2223471800, 2227579400, 2231688600, 2235799400, 2239911800, 2244025800, 2248141400, 2252258600, 2256377400, 2260497800, 2264619800, 2268743400, 2272868600, 2276995400, 2281123800, 2285253800, 2289385400, 2293518600, 2297653400, 2301789800, 2305927800, 2310067400, 2314208600, 2318351400, 2322495800, 2326641800, 2330789400, 2334938600, 2339089400, 2343241800, 2347395800, 2351551400, 2355708600, 2359867400, 2364027800, 2368189800, 2372353400, 2376518600, 2380685400, 2384853800, 2389023800, 2393195400, 2397368600, 2401543400, 2405719800, 2409897800, 2414077400, 2418258600, 2422441400, 2426625800, 2430811800, 2434999400, 2439188600, 2443379400, 2447571800, 2451765800, 2455961400, 2460158600, 2464357400, 2468557800, 2472759800, 2476963400, 2481168600, 2485375400, 2489583800, 2493793800, 2498005400, 2502218600, 2506433400, 2510649800, 2514867800, 2519087400, 2523308600, 2527531400, 2531755800, 2535981800, 2540209400, 2544438600, 2548669400, 2552901800, 2557135800, 2561371400, 2565608600, 2569847400, 2574087800, 2578329800, 2582573400, 2586818600, 2591065400, 2595313800, 2599563800, 2603815400, 2608068600, 2612323400, 2616579800, 2620837800, 2625097400, 2629358600, 2633621400, 2637885800, 2642151800, 2646419400, 2650688600, 2654959400, 2659231800, 2663505800, 2667781400, 2672058600, 2676337400, 2680617800, 2684899800, 2689183400, 2693468600, 2697755400, 2702043800, 2706333800, 2710625400, 2714918600, 2719213400, 2723509800, 2727807800, 2732107400, 2736408600, 2740711400, 2745015800, 2749321800, 2753629400, 2757938600, 2762249400, 2766561800, 2770875800, 2775191400, 2779508600, 2783827400, 2788147800, 2792469800, 2796793400, 2801118600, 2805445400, 2809773800, 2814103800, 2818435400, 2822768600, 2827103400, 2831439800, 2835777800, 2840117400, 2844458600, 2848801400, 2853145800, 2857491800, 2861839400, 2866188600, 2870539400, 2874891800, 2879245800, 2883601400, 2887958600, 2892317400, 2896677800, 2901039800, 2905403400, 2909768600, 2914135400, 2918503800, 2922873800, 2927245400, 2931618600, 2935993400, 2940369800, 2944747800, 2949127400, 2953508600, 2957891400, 2962275800, 2966661800, 2971049400, 2975438600, 2979829400, 2984221800, 2988615800, 2993011400, 2997408600, 3001807400, 3006207800, 3010609800, 3015013400, 3019418600, 3023825400, 3028233800, 3032643800, 3037055400, 3041468600, 3045883400, 3050299800, 3054717800, 3059137400, 3063558600, 3067981400, 3072405800, 3076831800, 3081259400, 3085688600, 3090119400, 3094551800, 3098985800, 3103421400, 3107858600, 3112297400, 3116737800, 3121179800, 3125623400, 3130068600, 3134515400, 3138963800, 3143413800, 3147865400, 3152318600, 3156773400, 3161229800, 3165687800, 3170147400, 3174608600, 3179071400, 3183535800, 3188001800, 3192469400, 3196938600, 3201409400, 3205881800, 3210355800, 3214831400, 3219308600, 3223786800, 3228267400, 3232750400, 3237235800, 3241723400, 3246213800, 3250705800, 3255199400, 3259694600, 3264191400, 3268689800, 3273189800, 3277691400, 3282194600, 3286699400, 3291205800, 3295713800, 3300223400, 3304734600, 3309247400, 3313761800, 3318277800, 3322795400, 3327314600, 3331835400, 3336357800, 3340881800, 3345407400, 3349934600, 3354463400, 3358993800, 3363525800, 3368059400, 3372594600, 3377131400, 3381669800, 3386209800, 3390751400, 3395294600, 3400000800, 3404599400, 3409199800, 3413799800, 3418399400, 3422999800, 3427599800, 3432199800, 3436799800, 3441399800, 3445999800, 3450599800, 3455199800, 3459799800, 3464399800, 3468999800, 3473599800, 3478199800, 3482$



(جواب تیرتیب اول صفر)

مسئله - مطلوب است محاسبه : اولاً  $\sqrt[3]{\frac{23}{755145}}$  ثانیاً  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{41241.9}}$  ثالثاً  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{5,1234}}}$  رابعاً  $\frac{(-0.229) \cdot \sqrt[3]{41,3} \times (0,2)^7}{(42,3)^2}$  خامساً  $\frac{\sqrt[3]{0,729} + \sqrt[3]{3,375}}{0,002 \times 0,00012}$  ششماً  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{201127.63576}}}$

جواب تیرتیب ۱۳، ۰، ۰۰۶۱، ۰، ۰۱۴،  $\frac{5909}{153}$ ، ۰، ۱۰۷، ۲، ۹۶مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$  اولاً بازاء  $b=3, a=-1$ ثانیاً بازاء  $b=-5, a=-2$  ثالثاً بازاء  $b=-4, a=-1,5$ 

جواب تیرتیب: ۱۱، ۲، -۷، -

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} - \sqrt[3]{a+b}$ اولاً بازاء  $a=-1, b=4$  ثانیاً بازاء  $a=4, b=-1$  ثالثاً بازاء  $a=-5, b=0$  $b=-6$  (جواب صفر)مسئله - اگر  $a=5, b=4, c=3$  باشد مقدار عبارت ذیل

$$x = \sqrt[3]{6abc + (b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 - (a+b+c)^3}$$

(جواب ۶)

مسئله - مطلوب است مقدار عددی  $\sqrt[3]{(2abc - 2bcd) \sqrt[3]{abc - c^2bd}}$



بازا،  $d = b - c$ ,  $c = -2b$ ,  $b = 1$ ,  $a = 0$

حل - واضحست که  $d = 1 - (-2) = 3$ ,  $c = -2 \times 1 = -2$

$$x = [2 \times 0 \times 1 \times (-2) - 2 \times 1 \times (-2) \times 3] \cdot \sqrt[3]{0 \times 1 \times (-2) - (-2) \times 1 \times 3 + 3}$$

$$= [0 + 12] \cdot \sqrt[3]{-2 + 3} = 12 \times 1 = 12$$

مسئله - مطلوبست مقدار عددی  $\frac{a^b + b^c + c^d}{b^a + c^b + d^c + (a+b)(b+c)}$  را با  $a=1, b=2, c=3, d=4$

حل -  $a=1, b=2, c=3, d=4$   $x(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$

$$x = \frac{1^2 + 2^3 + 3^4}{2^1 + 3^2 + 4^3 + 3 \times 5} + 3(1^1 + 2^2 + 3^3) \times (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$$

$$= \frac{1+8+81}{2+9+64+15} + 3 \times (1+4+27) \times \frac{11}{6} = 177$$

مسئله - حساب کنید مقدار  $\sqrt{(x^2+y^2-z)(x-y-z)} : \sqrt[3]{xy^2z^2}$  را با  $x=-1, y=-3, z=1$

با  $x=-1, y=-3, z=1$

(جواب  $\frac{5}{3}$ )

مسئله - مطلوب است مقدار  $\sqrt[3]{4c^2 - a(a-2b-d)} - \sqrt[3]{b^4 + 11b^3d}$  با  $a=4, b=-2, c=\frac{3}{4}, d=-1$

(جواب  $-7$ )  $a=4, b=-2, c=\frac{3}{4}, d=-1$

مسئله - ثابت کنید که:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$







ثابت کنید که اگر  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  باشد و اگر  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m+n}$  باشد  $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

مسئله - مطلوب است مقدار  $a^{-n}$ ،  $a^0$

حل - اولاً از تساوی  $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$  نتیجه می شود  $a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$

ثانیاً از تساوی  $a^{-n} \cdot a^n = a^0 = 1$  حاصل می شود  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

مسئله - مطلوب است مقدار  $\frac{a^0}{a^1}$ ،  $\frac{a^0}{a^2}$ ،  $\frac{a^0}{a^3}$ ،  $\frac{1}{(0,1)^2}$ ،  $\frac{1}{4^{-2}}$ ،  $\frac{3}{3^{-1}}$

جواب :  $a^3$ ،  $9$ ،  $4$ ،  $0.25$

مسئله - مطلوب است مقدار  $a = -4 \times 6^{-2} + 3^{-2} + 1^0 - 2^1 + 8^0$

$$a = -4 \times \frac{1}{6^2} + \frac{1}{3^2} + 1 - 2 + 1 = 0$$

حل -

مسئله - مطلوب است مقدار  $\frac{a^2}{a^0 - b^0 + a^2}$ ،  $4^0 : 100^0$ ،  $5^0 - 5^{-2} + 3^0$

$$5^2 - 3^1 - 9^0 - 1^0 + \frac{1}{-3} \quad , \quad a^0 + 2b^1 + b^0 - \frac{2b^5}{b^4}$$

$$(a+b+c)^0 - a^0 - b^0 - c^0 \quad , \quad b^2 + b + b^0 - 1 - \frac{b^4}{b^3}$$

جواب ترتیب :  $1, 9, 1, 1, 2, \frac{5^9}{3}, b^2, -2$

مسئله - مطلوب است مقدار  $x^{\frac{1}{4}}$

حل - فرض کنیم  $y = x^{\frac{1}{4}}$  باشد نتیجه می شود  $y^4 = (x^{\frac{1}{4}})^4 = x = x$  پس

$$x^{\frac{1}{4}} = \sqrt{x} \quad \text{و از آنجا} \quad y = \sqrt{x}$$



(۲۸)

مسئله - ثابت کنید که:  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ مسئله - مطلوب است مقدار:  $25^{\frac{1}{5}}, 16^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{1}{3}}$ 

جواب تقریب: ۱.۰، ۱، ۶/۵

مسئله - مطلوب است مقدار  $(\frac{25}{36})^{-\frac{1}{2}}$ 

$$\text{حل - } (\frac{25}{36})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\frac{25}{36})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{36}}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی عبارت ذیل با  $a=1, b=1$ 

$$A = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} - \frac{2}{a^0} + 512^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{حل - } A = \sqrt[3]{1} - \frac{2}{1} + \sqrt[3]{512} = 1 - 2 + 8 = 7$$

مسئله - مطلوب است مقدار  $P = (\frac{1}{9})^{-2} \times (\frac{1}{64})^{-\frac{1}{3}} \times (\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}$ 

$$\text{حل - } P = \frac{1}{(\frac{1}{9})^2} \times \frac{1}{(\frac{1}{64})^{\frac{1}{3}}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{1}{81}} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} \times \frac{1}{2}$$

$$= 81 \times 4 \times \frac{1}{2} = 162$$

مسئله - حساب کنید مقدار  $(-\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}, (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} \times (\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}, 11^{-\frac{1}{2}}$ 

$$\frac{x^2 \times x^7}{x^3 \times x^6}$$

جواب تقریب:  $\frac{1}{4}, 1, -\frac{2}{3}, 1$ ۱۲ - ریشه  $n$ ام - ریشه  $n$ ام هر عدد مانند  $a$  عددیست



مانند  $x$  بقسقی که  $x^n = a$  باشد. عدد  $x$  را به علامت  $\sqrt[n]{a}$  بنمایند.

بسیار است معلوم میشود که  $(\sqrt[n]{a})^n = a$

اگر  $n$  زوج باشد  $x^n$  همیشه مثبت است. و بنا بر این  $a$  نیز مثبت میباشد.

و علاوه در این صورت دو مقدار برای  $x$  پیدا میشود که در رابطه  $x^n = a$

صدق کنند و از این دو معلوم میشود که اولاً مقادیر منفی ریشه زوج ندارند.

و ثانیاً هر مقدار مثبت دو ریشه زوج دارد.

مسئله - ثابت کنید که

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad \sqrt[n]{r} = r^{\frac{1}{n}}$$

مسئله - مطلوب است مقدار  $x = (4^{-\frac{1}{5}})^{\frac{5}{4}}$

$$x = 4^{-\frac{1}{5} \times \frac{5}{4}} = 4^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{2}$$

مسئله - تحقیق کنید که

$$(\sqrt[4]{3})^4 = 3, \quad \frac{x^4 \times x^4}{x^4 \times x^4} = 1, \quad (2^{\frac{1}{4}})^{-2} = \frac{1}{2}$$

مسئله - ثابت کنید که  $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

$$\text{اثبات.} \quad \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} =$$

$$(xy)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{xy}.$$



تحويل دو يا چند را ديكال بيك نمايند.

و افصحت كه :

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} \quad \text{و} \quad \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{b^{\frac{1}{n}}}$$

از اين دستورات معلوم ميشود كه هر سواره دو يا چند را ديكال را ميتوان بيك نمايند تحويل كرد. معمولاً برآي عدد كوچكترين مضرب مشترك اعداد  $m, n$  و غيره را انتخاب ميكنند مثلاً فرض كنيم مقصود تحويل را ديكا  $a$  و  $b$  و  $c$  بيك نمايند باشد. كم اعداد ۶ و ۱۰ و ۱۲

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^2} = \sqrt[12]{a^2} \quad \text{جاءت از ۱۲}$$

$$\sqrt[10]{b} = \sqrt[60]{b^6} \quad \text{و} \quad \sqrt[12]{c} = \sqrt[60]{c^5}$$

براي ضرب كردن دو يا چند را ديكال كه نمايند ايشان مختلف باشند آنها را بيك نمايند تحويل نمود و بعد عمل را بحسري مي سازيم مثلاً  
براي ضرب كردن  $\sqrt{a}$  و  $\sqrt[3]{b}$  چون ملاحظه كنيم كه :

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{b^2}$$

حاصل ميشود :

$$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{a^3 b^2}$$

منته



مثلاً مستقلاً ثابت کنید که :

$$\sqrt{۲۲} \cdot \sqrt{۵} = \pm ۴, \sqrt[۳]{۷} \cdot \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{۲۱}, \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$$

$$\sqrt[۵]{a^۲} \cdot \sqrt[۵]{a^۳} = a, \sqrt{۱} \cdot \sqrt{۲} = \pm ۴, ۵\sqrt{a} \times ۲\sqrt{۳} = ۱۰\sqrt{۳a}$$

$$\sqrt[۳]{۶۴} \cdot \sqrt[۳]{۸} = ۸, \sqrt[۳]{a^۲} \cdot \sqrt[۳]{a} = a, \sqrt[n]{a^{n-1}} \cdot \sqrt[n]{a} = a$$

$$۳\sqrt{۳} \times ۲\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۶}, (\sqrt{۲})^۲ + \sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۳۶}$$

مسئله - ثابت کنید که  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c} \sqrt[n]{d} \sqrt[n]{e} = \sqrt[n]{abcde}$

مسئله - تحقیق کنید که  $\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۳} \cdot \sqrt{۶} = ۶$

مسئله - حساب کنید مقدار  $x = \sqrt{\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۳} \cdot \sqrt{۵} \cdot \sqrt{۶} \cdot \sqrt{۷,۲}}$

حل -  $x = \sqrt{\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۳} \cdot \sqrt{۶} \cdot \sqrt{۵} \cdot \sqrt{۷,۲}} = \sqrt{\sqrt{۳۶} \cdot \sqrt{۳۶}}$

$x = \sqrt{۳۶} = \pm ۶$  پس  $\sqrt{۳۶} \cdot \sqrt{۳۶} = ۳۶$

مثلاً - تحقیق کنید که

$$\sqrt{۳} \cdot \sqrt{۴} \cdot \sqrt{۵} \cdot \sqrt{۶} \cdot \sqrt{\frac{1}{۱۵}} = \pm ۶, \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{ab}} = ۱$$

$$\sqrt{۵} \times \sqrt{۵۰} \times \sqrt{۱۰} = \pm ۵۰, \sqrt[۳]{۲} \cdot \sqrt[۳]{۳} \cdot \sqrt[۳]{۶^۲} \cdot \sqrt[۳]{۱} = ۶$$

$$\sqrt{\sqrt[۳]{۳۶^۲} \cdot \sqrt[۳]{۶} \cdot \sqrt[۳]{۶ \times ۲}} = \pm ۶, \sqrt[۳]{\sqrt{۳} \times \sqrt{۲۷} \times ۵} = \sqrt[۳]{۹}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{abc^۲} \cdot \sqrt{\frac{1}{ac^۲}} \cdot \sqrt{ac} = abc, (۹^۲)^۲ + ۶ = \sqrt{۴۹}$$



# ۱۱- نمایش هندسی اعداد جبری

بدیهی است که برای تعیین وضع نقطه مانند  $A$  بر خط نامحدود  $xx$  (موسوم به محور) معلوم بودن فاصله نقطه  $A$  از نقطه ثابتی مانند  $O$  که بر خط  $xx$  فرض شده و دانستن اینکه آیا نقطه  $A$  در سمت چپ یا راست  $O$  قرار گرفته است لازم و کافی است.



اگر موافق قرار داد طولها را از  $O$  به سمت راست و از  $O$  به سمت چپ اعتبار بخشیم دیده میشود که اولاً هر نقطه از محور را میتوان با یک عدد جبری نمایش داد و ثانیاً هر عدد جبری نقطه را بر محور مشخص میکند مثلاً عدد  $+۵$  نقطه نمایش میدهد که فاصله  $۵$  برابر واحد طول در سمت راست  $O$  قرار گرفته باشد (نقطه  $A$ ) و عدد  $-۲$  نقطه را نمایش میدهد که فاصله  $۲$  برابر واحد طول در سمت چپ  $O$  قرار گرفته باشد (نقطه  $B$ ). بالعکس نقطه  $A$  نمایش عدد  $+۵$  و نقطه  $C$  نمایش  $+۳$  و نقطه  $B$  نمایش  $-۲$  و بالاخره نقطه  $D$  نمایش  $-۴$  است. عدد جبری که در مطلقش فاصله نقطه منفرجه از نقطه ثابت  $O$  که همبدا را موسومست باشد بطول آن نقطه

موسست مثلاً طول نقطه  $2B +$  و طول نقطه  $F - 3$  است

از آنچه گفتیم معلوم شود که وضع نقاط واقع بر یک محور بواسطه طولشان مقین شود

(نخستین مسئله نقیصه ریاضی)

یکجمله حضرت انگیز

۵ نفر مسلمان و ۵ نفر یهودی در زور قی که دچار طوفان شدید می شد  
نشسته اند طراح گفت برای خلاص کردن نعلت مسافرین باید نصف دیگر را  
در دربار بخت و برای انجام این عمل مشغول شد و او ند که مسافرین تریب همدی  
یکدیگر بستند و آنها را به نه شهر نهی را در آب اندازند و این عمل را نقد  
تکرار کنند تا ۵ نفر مسافرین نماند این ۳ نفر را چگونه بشاییم تا آنهایی که  
در آب میافتند نجات یهودی باشند .

حل - واضحست که در دفعه اول آنهایی که در مرتبه نهم و هجدهم و بیستم  
نشسته اند باید ریاضافتند و چون بعد از اتمام این سه نفر با ۲۷ نفر  
باقی عمل را تکرار کنیم جائزین مراتب ۶ نم و ۱۶ نم و ۲۶ نم از بین میروند  
و ۴ نفر دیگر باقی میمانند و چون عمل را نقد تکرار کنیم تا ۵ نفر بمانند  
می شود که جائزین مراتب ذیل جان باختند



۲۴ و ۲۳ و ۲۲ و ۱۹ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۲ و ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵

۳۰ و ۲۷ و ۲۶

پس کافی است یهودیها را در ایما تب و تسلیمن را در ۱۵ مرتبه دیگر بنویسیم  
 برای اینکه عمل را بلا وزنگ انجام دهیم کافی است شعری را بنویسیم  
 ز ترکمان چهار روز بند دست پنج دور و می تو بایک عراقی پنج  
 سه روز و شش یکت نهارد و دلیل دو باز و سه راع و یکی چون سبیل  
 دو مانع و دو منغ یکی بسپرد و دو زنده نشود در دن بر اقد یهود  
 در این اشعار اعداد یک اول ذکر شده عده مسلمانان و اعدای که در  
 مرتبه دوم ذکر شده عده یهودیها است مثلاً از شعری اول از ترکمان  
 چهار روز بند دست پنج. معلوم میشود که باید اول چهار مسلمان و بعد پنج  
 یهودی نشانند و قس علیهذا الی آخر .  
 بدیهی است که در عمل میتوان بجای اشخاص اشبار را قرار داد و بجای  
 انیل را بسلیقه قارمین میگذا ریم .

## فصل دوم

( اجرای اعمال اصلی در جمله )

۱۲- تعریف - حاصل ضرب چند متداری را یک جمله یا منظم

خوانند مثلاً هر یک از عبارات ذیل یک جمله هستند :  $\frac{1}{4}a^2bc$  -

$$\sqrt{a^2+b^2}, -\frac{1}{x^2}, -\frac{4}{5}c\sqrt{a}, -2\sqrt{2}b, \sqrt{a^2xyz}$$

$$+\frac{ab}{2\sqrt{c}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+xy}}, -\frac{1}{3}, -2\sqrt{2}, -\frac{4}{5}, -1, +1$$

$$, c\sqrt{a}, b, \sqrt{a^2xyz}, a^2bc, \frac{1}{4}, -1, +1$$

$$\frac{1}{x^2}, \sqrt{a^2+b^2}, \frac{ab}{\sqrt{c}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2+xy}},$$

خوانند

وقتی در مخرج منظم حرف نباشد منظم را صحیح و آن کسری خوانند مثلاً

$$از بین منتهای فوق  $\frac{1}{4}a^2bc$  - و  $\sqrt{a^2xyz}$  و  $c\sqrt{a}$  - و  $-2\sqrt{2}b$  -$$

$$\text{و } \sqrt{a^2+b^2} \text{ صحیح و بقیه کسری هستند .}$$

وقتی یک جمله شامل ریشه حروف نباشد آنرا منطبق و آن اصم خوانند

مثلاً از بین منتهای فوق الذکر سومی و چهارمی و پنجمی و ششمی و هفتمی

منطقه



وقتی فرض سه‌ری دو یا چند یک جمله مساوی باشند آنها را مشابه خوانند

مانند یک جمله های  $\frac{2}{5}ax^2, -2ax^2, 3ax^2$  و  $\frac{2}{5}ax^2$

مجموع چند منم مشابهی است که ضریبش مجموع ضرایب اول و جزو فرضش جزو فرضی مشترک آنها باشد

وقتی یکی چند منم مشابه مجموعشان را قرار دهیم گویند عمل تحویل تبسلی مشابه بجا آورده ایم

مسئله - یک جمله های  $14xy, -9xy, 5xy$  و  $-3xy$  را جمع کنید

حل - موافق قاعده فوق الذکر مجموع مطلوب منم است که جزو فرضش

$xy$  و ضریبش  $14 - 9 + 5 - 3 = 7$  باشد پس :

$$14xy - 9xy + 5xy - 3xy = 7xy$$

مسئله - عبارت  $x^2 - x^2 - 15x^2 + 11x^2 - 5x^2 - 6x^2$  را مختصر کنید

حل - مطابق قاعده فوق ،

$$A = (5 - 6 - 15 + 11 - 1 - 1)x^2 = -7x^2$$

مسئله - تحقیق کنید که ،

$$2a + 5a - 1a = -a, x - 5x = -4x, a + 7a + 12a = 22a$$

$$-2c + 14c + 5c = 17c, 2xy + 14xy = 16xy, x - 4x = -3x$$

$$-7c - 14c - 12c = -33c, -1b - 4b - 3b - 5b = -13b$$

$$vxy - rxy = 0xy, \quad ra\sqrt{b} + va\sqrt{b} - 10a\sqrt{b} = -a\sqrt{b}$$

$$12\frac{b}{c} - 5\frac{b}{c} = 0\frac{b}{c}, \quad ab + ab - ab + ab - rab = 0$$

$$0rxy^2z^2 + r0xy^2z^2 - rrx^2y^2z^2 = rrx^2y^2z^2$$

$$11a^5b - rra^5b + rra^5b - 10a^5b - rra^5b = 0$$

$$12x^4y^4 + r12x^4y^4 - 12x^4y^4 - r12x^4y^4 = 0x^4y^4$$

$$-rra^2c^2 + 12a^2c^2 - 120a^2c^2 + 101a^2c^2 = 0$$

$$a^5b^5x + r9a^5b^5x + 11a^5b^5x - 01a^5b^5x = 0$$

$$9\sqrt{a^2+b^2} - 0\sqrt{a^2+b^2} - 10\sqrt{a^2+b^2} + 0\sqrt{a^2+b^2} = -\sqrt{a^2+b^2}$$

$$v\frac{\sqrt{a}}{x^2} - r\frac{\sqrt{a}}{x^2} - 9\frac{\sqrt{a}}{x^2} + \frac{0\sqrt{a}}{x^2} = 0$$

$$9ra^5b^9d - rra^5b^9d + r1a^5b^9d + 11a^5b^9d = 90a^5b^9d$$

$$1xyz \text{ مجموع } -10xyz, \quad rxyz, \quad rxyz \text{ مجموع}$$

$$rxyz, \quad -rxyz, \quad -rxyz \text{ مجموع } (جواب rxyz)$$

$$rxyz, \quad rxyz \text{ حاصل ضرب}$$

حل - واضح است که:

$$rxyz^2 \times rxyz^2 = rxxxy^2x^2y^2xz^2 = rxxvxx^2x^2x^2$$



$$xy^2 \cdot y \cdot x = 21x^2y^3z$$

مسئله مطلوب است حاصل ضرب  $2ax^2y^2, -5x^2y^3$

حل -  $(2ax^2y^2)(-5x^2y^3) = 2 \times a \times x^2 \times y^2 \times (-5) \times x^2 \times y^3 = -10ax^4y^5$   
مسئله - تحقیق کنید که :

$$3b \cdot 4b = 12b^2, (-3a)(2ab) = -6a^2b, (-5b^2)(2b^3) = -10b^5$$

$$4c^2 \cdot (-5a^2) = -20a^2c^2, (-12x^3)(-4x^2) = 48x^5, a \cdot (-a) = -a^2$$

$$4a^2 \cdot (-6b^2) = -24a^2b^2, (-2a^3y^2x)(4yz^2) = -8a^3y^2xz^2$$

$$5a^2c^2 \cdot (-4a^2) = -20a^4c^2, (-2x^2y)(-xy^2) + x^3y^3 = 2x^3y^3$$

مسئله - مطلوب است حاصل ضرب  $-ay, 5x^2y^2, -2ay^2$

حل - اگر حاصل ضرب مطلوب را به  $P$  بنماییم :

$$P = (-ay) \cdot (5x^2y^2) \cdot (-2ay^2)$$

$$= (-a) \cdot y \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot (-2) \cdot a \cdot y^2$$

$$= (-2) \cdot 5 \cdot (-a) \cdot a \cdot x^2 \cdot y \cdot y^2 \cdot y^2 = 10a^2x^2y^5$$

مسئله - تحقیق کنید که :

$$(-2a^2)(-5xa)(a^2yx) = 10a^5x^2y, x^3y + y^3x = x^2y^2$$

$$(-3a^2b^2c^2)(-abc)(2ax)(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-3}) = -ac^2$$

$$(-9axy)(3ax)(-2a^2x) = 54x^2yzax^2$$

$$(-xy)(+x^2y^2)(-x^3y^3) + (xy^2)(x^2y)(x^2y^2) = 2x^2y^2$$

۱۳ قاعده ضرب کجمله ها - از مسائل فوق قاعده ضرب چند یک جمله است

میآید از انبهار: حاصل ضرب چند منمنی است که ضریبش حاصل ضرب

ضرایب عوامل ضرب و جز عرفش حاصل ضرب اجزاء حرفی آنها باشد

مثلاً مسائل نمبر ۱۲۴ و ۱۲۵ و ۱۲۶ و ۱۲۷ را بر وفق قاعده حل کنید

۱۲۸ - تحقیق کنید که :

$$(-3a^2bc)^2 = 9a^4b^2c^2, 2a^{-6} = \frac{2}{a^6}, a^{-5} = \frac{1}{a^5}, a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{12a}{b^6} = 12ab^{-6}, \frac{-3a^2}{b^2} = -3a^2b^{-2}, \sqrt{a^4} = \pm a^2$$

$$\sqrt[3]{12a^3b^3} = 3ab, \sqrt[3]{-12a^3c^3} = -3ac, (a^2c^3)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}c$$

$$(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}} = \pm a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}, (xy)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{xy}, \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\sqrt{20x^2y^2z^2 - 3x^2y^2z^2 - x^2y^2z^2} = \pm 4xyz$$

$$\sqrt[3]{a^3x^3 + 3a^3x^3 - 5a^3x^3} = -ax, 9x^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{\sqrt{x}}$$

$$(a^2b^2 + 9a^2b^2 + 16a^2b^2 - a^2b^2)^{\frac{1}{2}} = \pm 4ab$$



$$5x^2 + 7x^2 + 1x^2 - 3x^2 - 9x^2 = 10x^2$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{x^3 y^3 z^3} = a^2 b^2 c^2 x^{-3} y^{-3} z^{-3}, \quad 13x^2 - 9x^2 = -4x^2$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$$

مسئله - مطلوب است خارج قسمت تقسیم  $-3ba^2$  بر  $17a^2b^3$

$$\frac{17a^2b^3}{-3a^2b^3} = -\frac{17}{3} \cdot \frac{a^2}{a^2} \cdot \frac{b^3}{b^3} = -\frac{17}{3} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{17}{3}$$

مسئله - مطلوب است خارج قسمت تقسیم  $9a^5b^3c^2d^4$  بر  $5a^2b^3c^2d^4$

حل - بدین است که :

$$\frac{9a^5b^3c^2d^4}{5a^2b^3c^2d^4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{a^5}{a^2} \cdot \frac{b^3}{b^3} \cdot \frac{c^2}{c^2} \cdot \frac{d^4}{d^4}$$

$$= \frac{9}{5} ab c^2 \cdot \frac{1}{d^4} = \frac{9abc^2}{5d^4}$$

پسند - تحقیق کنید که :

$$\frac{10m^2n^2p^2}{5n^2mp^2} = \frac{2m}{1}$$

$$\frac{-5a^2b^4}{-5a^2b^4} = \frac{ab^4}{1a}$$

$$\frac{vxyzm^2}{7m^2xyz^2} = \frac{v}{7yz}$$

$$\frac{-11x^2y^3a^2}{2x^2y^3a^2} = -\frac{11xy^3}{2}$$

$$\frac{-2x^{m+2}y^{m+2}}{-x^{m-1}y^{m-1}} = 2x^3y^3, \quad \frac{a^{10m}}{a^{9m}} = a^m$$

$$\frac{2x^{2n}y^2z^2 + 2x^{2n}y^2z^2}{2x^{2n}y^2z^2} = x^{2n}y^2z^2$$

$$\frac{\Delta x^m y^n z^p}{15 x^{-1} y^{-1} z^{-1}} = \frac{1}{15} x^{m+1} y^{n+1} z^{p+1}$$

$$\frac{a+b+c-a+d+e-b-e+x^m-c-d}{15xy+xyz-xz+x^2-xy^2-xy} = x^{m-n}$$

$$\frac{r^m x^r}{r^{m+n}} \times \frac{r^m}{r^m} \times \frac{r^n}{r^n} = 1$$

$$(5x^4yz + 2x^5yz - 1,5x^4yz + 5x^5yz - 4,5x^4yz):$$

$$(5x^4yz + 2x^5yz + 0,5x^4yz - 1,5x^5yz) = \frac{4x}{y}$$

$$\left( \frac{x}{y^5} \cdot x^3y^4 + \frac{rx^r}{y^r} \cdot x^3y^4 + \frac{x^3}{y^3} \cdot xy^4 - 5x^4y^4 \right) : x^4y^4$$

$$\frac{-ra^{m+1}b^{n+2}}{-a^m b^r} - \frac{-a^{14}b^{14}}{-a^{14}b^{14}} = rab^r - a^1b^4$$

$$\left( \frac{x^r}{y^r} : x^r \right) y^r : \frac{a^9 x^p}{a^4 x^9} = a^{p-9} x^{9-p}$$

۱۴- قاعده تقسیم دو جمله : خارج قسمت دوم منهای است که ضریب خارج قسمت

ضریب مقوم بر ضریب مقوم علیه و جزء دریش خارج قسمت جزء حریفی آنها

مسئله - مسائل فرد ۱۳۱ موافق بقاعده حل کنید

مسئله - مطلوبیت مقدار عبارت  $x^3 - a^3x - 2a^3$  از  $a$  باز  $x = 2a^3$

(جواب : صفر)

ثانیا باز  $x = -a^3$

مسئله - مطلوبیت مقدار عبارت  $a^2 + 15aR - 5R^2$  از  $a$  باز  $a = -5R$

(جواب : صفر)



مسئله - حساب کنید مقدار همان عبارت را با  $a = \frac{R}{4}$  (جواب: ۱)

مسئله -  $a^{\frac{m}{n}}$  چه معنی دارد؟

حل - فرض کنیم  $x = a^{\frac{m}{n}}$  چون طرفین را بقوه  $n$  ام برسانیم حاصل

میشود  $x^n = a^m$  یا پس از استخراج ریشه  $n$  از طرفین  $x = \sqrt[n]{a^m}$

یعنی  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

مسئله - مقدار  $9^{\frac{3}{4}} \times 16^{\frac{3}{4}}$  چند است

حل -  $9^{\frac{3}{4}} \times 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3} \times \sqrt[4]{16^3} = 27 \times 8 = 216$

پسند - تحقیق کنید؛

$$(-32)^{\frac{1}{5}} = -2, \quad 1^{\frac{7}{8}} = 1, \quad 1^{\frac{m}{n}} = 1, \quad 32^{\frac{2}{5}} = 4$$

$$125^{\frac{2}{3}} = 25, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{32}, \quad 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$$

$$11^{\frac{m}{4}} = 3^m, \quad 2^{\frac{2}{m}} = \sqrt{4}, \quad (a^4 b^2)^{\frac{5}{4}} = a^5 b^5$$

پسند - تحقیق کنید؛

$$a^{-2} b^{-3} c^2 = \frac{c^2}{a^2 b^3}, \quad 3a^2 xy^{-5} = \frac{3a^2 x}{y^5}, \quad r^{-3} = \frac{1}{r^3}$$

$$x^{\frac{5}{8}} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[5]{x^5}}{\sqrt[3]{y}}, \quad 5a^{-3} b^{\frac{5}{4}} c^{-\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt[5]{b^5}}{a^3 \sqrt{c}}$$

$$x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = xy, \quad x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

$$5a^3 \times 2a^{-4} = 10a^{-1} = \frac{10}{a}, \quad a^5 : a^{-4} = a^{5-(-4)} = a^9 = a$$

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5, \quad 2a^{-\frac{5}{4}} \cdot 2a^{-\frac{5}{4}} \cdot 2a^{\frac{3}{2}} = 10a^{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{a^{\frac{1}{2}}}$$

مسئله - بنابر آنکه:  $A = 5x^2y - 3x^2y - 6x^2y + x^2y$

$$B = 5y^2x - 3y^2x - 4y^2x + xy^2 + 7xy^2 - 4xy^2 - 3x^2y$$

خداست  $\frac{A}{B} \times C$  باشد  $C = -5y^2x + 3x^2y + 3x^2y$

(جواب  $y^2x$ )

مسئله - عبارت  $a^0 \times 16^{-\frac{3}{4}} \times (1^{\frac{3}{4}} + 4^{\frac{3}{4}})$  را مختصر کنید

حل - اگر مقدار عبارت فوق را به  $x$  بنمایم مرتباً چنین خواهیم داشت

$$x = (\sqrt[3]{1^3} + \sqrt[3]{4^3}) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = (1+4) \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

مسئله - عبارت  $2^{-1} + 4^0 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - (\frac{1}{3})^{-2} - 4^{-\frac{1}{2}}$  را مختصر کنید

(جواب ۶)

مسئله - عبارت  $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} + (\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}} - 4^{\frac{3}{4}} - 10 + 2^2$  را ساده کنید

(جواب ۲-)

مسئله - عبارت  $A = x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot (\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}})$  را مختصر کنید

حل - اذفحت که:



$$A = x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$$

مسئله عبارت  $A = x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right) : \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$  را ساده کنید.

$$A = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} : \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

مسئله حاصل عبارت ذیل را بدست آورید

$$x = 27^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{1^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$x = \sqrt[3]{27^2} + \sqrt[3]{16^2} - 2 \times 1^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 11$$

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید

$$P = \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{ac} \cdot \frac{\sqrt[3]{c^3}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b^4}}{a^{-\frac{1}{4}}}$$

حل - به سبب معلوم می شود که :

$$P = b \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{2}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$$

$$= (b \cdot b^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{4}}) (a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}}) (c^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{2}{4}}) = c^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{c^3}$$

مسئله تحقیق کنید که :

$$5^{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} - 5^{\frac{1}{2}} = 39, 8, 2\sqrt{a} + \frac{10}{a^{\frac{1}{2}}} + a^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{a^5}}{a} = 5\sqrt{a}$$

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x}}, \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^{13}}, \frac{2}{\sqrt{y^{-3}}} = 2\sqrt{y^3}, 3^0 = 1$$

$$\frac{1}{4\sqrt{x^{-3}}} = \frac{1}{4} \sqrt[5]{x^3}, \frac{a^{-\frac{1}{4}}}{2a} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{a^{-5}}, \frac{\sqrt[3]{x^{-a}}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^{a+2}}}$$

مسئله - ثابت کنید که:  $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$

برهان :-  $(\sqrt[n]{x})^m = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

مسئله - ثابت کنید که  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

دلیل :-  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = (x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{x}$

مسئله - ثابت کنید که:  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

اثبات :-  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

مسئله - تحقیق کنید که:  $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ ,  $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$ ,  $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = \sqrt[8]{x}$ ,  $\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x}$

$\sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$ ,  $\sqrt[7]{x^2} = \sqrt[14]{x}$ ,  $\sqrt[6]{6^4 \cdot 2} = 2$ ,  $\sqrt[7]{2^7} = 2$

$\frac{6\sqrt[3]{14}}{2\sqrt[3]{21}} = 3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ ,  $2\sqrt[3]{15} \times 3\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{75}$ ,  $5\sqrt[3]{4} \cdot 6\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{5}$

$\frac{3\sqrt[3]{11}}{2\sqrt[3]{98}} \cdot \frac{5}{7\sqrt[3]{21}} = \frac{3\sqrt[3]{11} \times 5\sqrt[3]{21}}{2\sqrt[3]{98} \times 7\sqrt[3]{21}} = \frac{15}{14}$ ,  $\frac{3\sqrt[3]{48}}{5\sqrt[3]{112}} \cdot \frac{6\sqrt[3]{14}}{7\sqrt[3]{98}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{10}$

مسئله - ثابت کنید که:  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{x}}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot p \cdot q]{x}$

مسئله - ثابت کنید که:  $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

برهان :-  $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

تحقیق کنید که:  $\frac{4}{11} \sqrt{\frac{11}{16}} = \sqrt{\frac{4}{11}}$ ,  $5\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{75}$

$\frac{a}{x^2} \sqrt{\frac{4x^2}{a}} = \sqrt{\frac{4a}{x}}$ ,  $\frac{3}{x} \sqrt{\frac{a^2}{x}} \times \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{4}{a^2}}$



مسئله مطلوبست مقدار عبارت ذیل را با  $x=a$  :

$$\frac{x^3+ax^2-a^2x+a^3}{x^2+ax+a^2} + \frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x^2-ax+a^2}$$

حل - اگر مقدار مطلوب را به  $y$  بنامیم :

$$y = \frac{a^3+a^3-a^3+a^3}{a^2+a^2+a^2} + \frac{a^3-a^3+a^3-a^3}{a^2-a^2+a^2} = \frac{2a^3}{3a^2} + \frac{0}{a^2} = \frac{2}{3}a$$

مسئله وقتی مخرج کسری که صورتش مقدار معینی است رو تنزل گذارد مقدار کسر صفر

تغییر میکند ؟ برای مثال کسر  $\frac{a}{x}$  را اختیار کنید و از این دو معنای برای

$\frac{a}{x}$  بدست آورید .

حل - چون در کسر  $\frac{a}{x}$  به  $x$  مقادیر  $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$

$\frac{1}{10000000000}$  و غیره نسبت به هم مقادیر تغییر  $\frac{a}{x}$  عبارتند از  $10a$

$100a, 1000a, \dots, 10000000000a$  و غیره چنانکه دیده شود

هر چه مخرج کسر کوچک شود مقدار آن رو تنزاید میگذارد و عبارت به آخری

برفت در مخرج کسر صفر نزدیک شود مقدار آن زیاد شود و قسمی که وقتی مخرج

کسر صفر شد مقدار آن فوق العاده بزرگست و از اینجا معلوم میشود که

$\frac{a}{x}$  مقدار بی نهایت بزرگی را نمایش میدهد و این مقدار بی نهایت بزرگ را

به  $\infty$  (بی نهایت) بنامند یعنی  $\frac{a}{x} = \infty$

مسئله - مطلوب است مقدار کسر  $\frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 - x^2 + x}$  باز  $x=0$  (جواب  $\infty$ )

مسئله - کسری مانند  $\frac{a}{x}$  اختیار نموده در آن بجای  $x$  مرتباً مقادیر ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را قرار دهید و از روی نتایج حاصله ثابت کنید که  $\frac{a}{\infty} = 0$

مسئله - مطلوب است مقدار عبارت  $\frac{x^2 - 5x + 8}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$  باز  $x=0$  (جواب صفر)

۱۵ - ذکر بعضی تعاریفات و اصطلاحات لازمه

۱ - منم نسبت یکی از حروفش صحیح خوانند در صورتیکه آن حرف در مرتبه منم نباشد.

مثلاً منم  $\frac{a^2}{c}$  نسبت به  $a$  و  $c$  صحیح و نسبت به  $c$  کسری است

۲ - درجه یک منم مجموع نماینده های حوالی آنست مثلاً منم  $a^2$

$x y z$  از درجه ششم و منم  $abc$  از درجه دوم است

۳ - درجه یک حرف را در منم درجه منم نسبت بآن حرف خوانند مثلاً منم

$a^2bc$  نسبت به  $a$  از درجه دوم و نسبت به  $c$  از درجه اول است

مسئله - صحت تساویهای ذیل را تحقیق کنید



$$\sqrt[r]{11} : \sqrt[r]{r} = r \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} \quad , \quad \sqrt[r]{rx^ry} : \sqrt[r]{\frac{x}{r+y}} = rxy$$

$$\frac{a}{x} \sqrt[r]{\frac{4x}{5a^r}} = \sqrt[r]{\frac{4a}{5x^r}} \quad , \quad \frac{m}{n} \sqrt[r]{\frac{na^{r+1}}{ma^{r+1}}} = \sqrt[r]{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{r+1}{5\sqrt{rr}} = \frac{\sqrt{rr}}{5} \quad , \quad \sqrt[r]{\sqrt[r]{x^ry^rz^r}} = (xyz)^{\frac{1}{r}}$$

$$\frac{rd}{\beta} \sqrt[r]{\frac{\beta^{rn}}{r^n \cdot d^{n+1}}} = \sqrt[r]{\frac{\beta^n}{d}}$$

$$\frac{r}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{rx}{a-b}} : \sqrt{\frac{11x^r}{(a-b)^a}} = \frac{a-b}{x}$$

$$xy \times \sqrt[r]{\frac{1}{xy}} : \sqrt[r]{xy^{-1}} = xy \sqrt[r]{y^r}$$

$$\frac{(arb^r)^{\frac{1}{r}} b^{-r} c^{\frac{1}{r}}}{a^{\frac{r}{r}} b^{-\frac{a}{r}} c^{\frac{1}{r}}} \quad \text{مسئله - مطلوب است مقدار عددی کسر}$$

$$\text{بازا، } c = rrr, b = r, a = r$$

( جواب ۱ )



## دومین مسئله هندسی

(مربعات سحری)

مربعی مانند  $ABCD$  به  $n$  خانه تقسیم شده است میخواهیم نه عدد طبیعی را در آن

خانه در خانه های این مربع جیستسی قرار دهیم که مجموع اعداد واقع در یک سطر

یا در یک ستون یا در یک قطر مساوی باشد

حل - باید اعداد را بطریق ذیل قرار داد:

A				B
	۴	۹	۲	
	۳	۵	۷	
D				C
	۸	۱	۶	

چنانکه دیده میشود  $۴+۹+۲=$

$$۳+۵+۷=۱+۱+۶=۴+۳+۱=۹+۵+۱$$

$$=۲+۷+۶=۴+۵+۶=۲+۵+۱=۱۵$$

حل مسئله در حالت کلی بنابر آنکه عدد تقسیمات ضلع مربع عدد

فردی باشد.

فرض کنیم میخواهیم  $n^2$  عدد طبیعی را با شرایط سابقان ذکر در مربعی قرار

دهیم مربعی مانند  $ABCD$  رسم نموده و هر ضلع آنرا به  $n$  جزء مساوی تقسیم

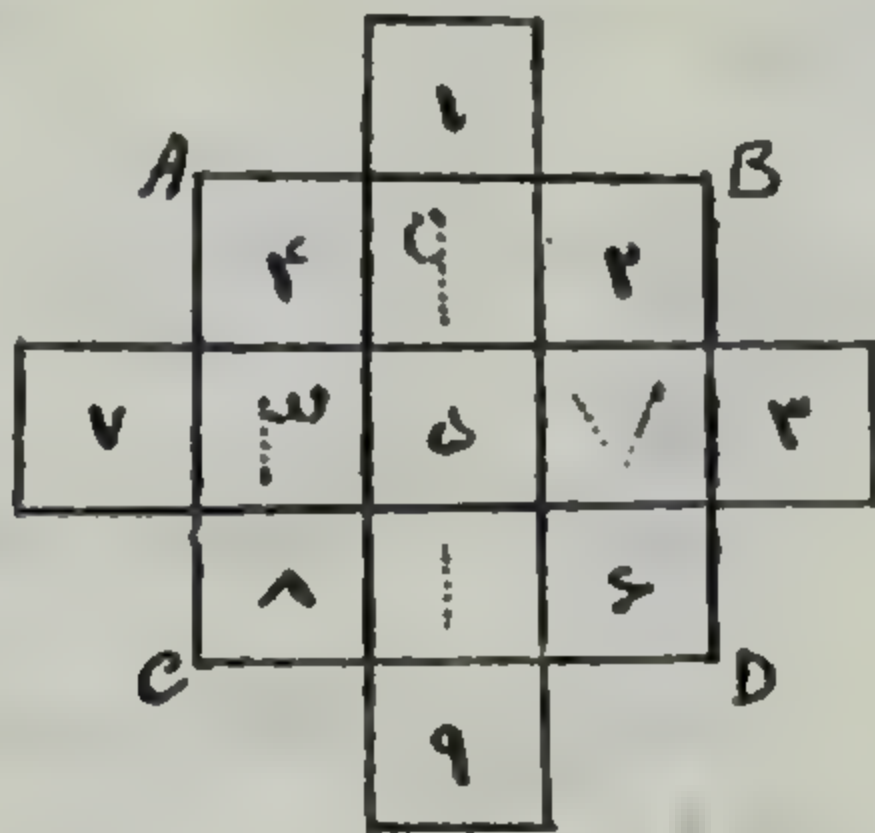
کرده از نقاط تقسیم خطوطی بوزنات با ضلع مربع مرسوم رسم میایم با

مربع  $ABCD$  به  $n^2$  خانه تقسیم شود. بعد خطوط مرسوم را در خارج مربع

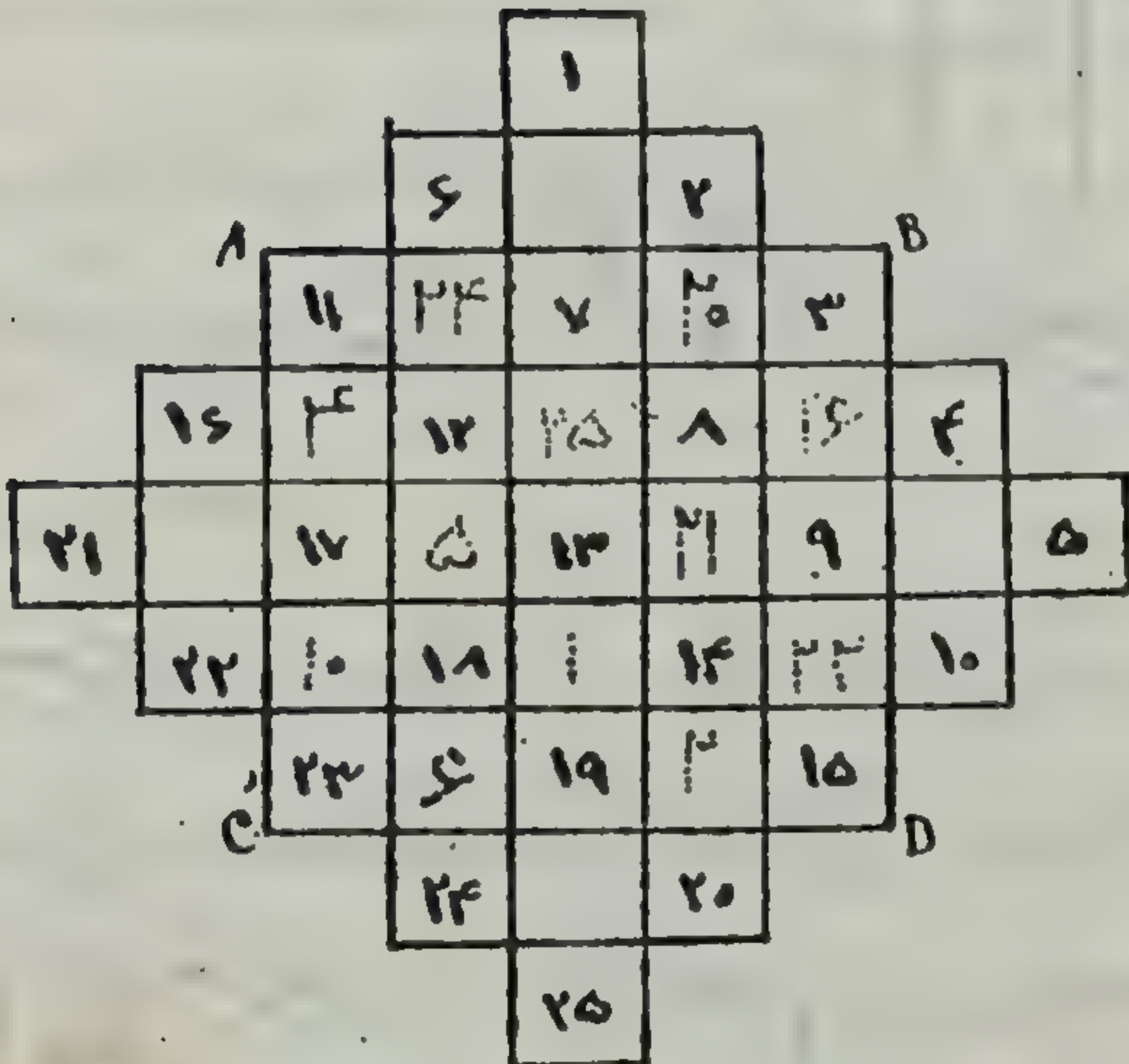


ABCD امتداد یزدسیم و مربعاتی بر روی آنها رسم یزدسیم تقسیمی که  
 عدده این مربعات زقه زقه کم شده بالاخره بیک مربع منتهی شود  
 جوع کنسیده شکل (۱) (۲)

س ۱



س ۲



بعد در مربع کوچکی که در فوق شکل قرار دارد عدد ۱ را قرار داده  
 اعداد ۲ و ۳ را در مربعاتی که قطرشان بر امتداد قطر مربع کوچکیست  
 فوقانی قرار میدهد پس بعد در سه مربع دیگری که قطرشان موازی  
 قطر مشترک این مربعات است ترتیباً اعداد ۴ و ۵ و ۶ را بنویسیم و بالا  
 در سه مربع دیگری که آنها نیز دارای این خاصیتند ارقام ۷ و ۸ و ۹  
 را میگذاریم عده از این ارقام که در داخل مربع  $ABCD$  واقع شده  
 بجای خود ثابت میمانند ولی آنها نیکو در فوق این مربع قرار دارند  
 باین میانند (در سمت ۳ = ۱ است) و اینک در تحت مربع  $ABCD$   
 قرار گرفته اند و غالباً میروند بالا خیره آنها را که در سمت راست چپ  
 $ABCD$  قرار دارند  $n$  خانه بطرف چپ یا راست حرکت میکنند  
 (در شکل اعداد ۱ را که بواسطه تقییر مکان در یکخانه آمده اند با نقطه نشان  
 و پس از اجرای این اعمال مربع  $ABCD$  پر میشود  
 در شکل (۲)  $n$  را مساوی پنج اختیار کرده ایم آنوقت مربع ذیل  
 بدست میآید که مجموع هر سطر یا ستون یا قطر آن ۶۵  
 است



۱۱	۲۲	۷	۲۰	۳
۴	۱۲	۲۵	۸	۱۶
۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹
۱۰	۱۸	۱	۱۴	۲۲
۲۳	۶	۱۹	۲	۱۵

برقع ذیل شامل ۸۱ عدد طبیعی است و مجموع هر سطر یا ستون یا قطر آن  
۳۶۹ میباشد و پُر کردن آن برشعلم است :

۴۵	۲۵	۲	۲۵	۵۱	۶۷	۷۳	۵۷	۱۴
۱۶	۳۸	۲۶	۹	۳۱	۴۶	۶۶	۷۷	۶۳
۵۶	۱۷	۴۲	۲۲	۱	۳۰	۵۰	۷۲	۷۹
۸۰	۶۰	۱۳	۳	۲۱	۵	۳۶	۵۲	۶۵
۶۹	۷۶	۵۵	۱۲	۴۱	۲۷	۷	۲۹	۵۳
۴۹	۶۴	۷۵	۵۹	۱۸	۴۳	۲۰	۸	۳۳
۲۸	۴۸	۶۸	۸۱	۶۱	۱۱	۴۴	۲۴	۱۴
۳	۳۲	۵۴	۷۰	۷۴	۶۲	۱۵	۴۰	۱۹
۱۳	۹	۳۴	۴۷	۷۱	۷۸	۵۸	۱۰	۳۹

بنیابست نیست قبل از ختم کردن این قسمت بعضی از خواص مربعات

سحری را متذکر شویم :

۱- اگر هر یک (از هر یک) از ارقام واقع در یک مربع سحری یکمقدار  
اضافه (نقصان) کنیم مربع سحری جدیدی حاصل میشود . مثلاً اگر به  
یک از ارقام مربع سحری ۹ خانه یک واحد اضافه کنیم مربع سحری ذیل  
بدست میآید که مجموع سطر یا ستون یا قطر آن ۱۸ است

۵	۱۰	۳
۴	۶	۸
۹	۲	۷

۲- اگر ارقام مربع سحری را در یک عدد ضرب یا بر آن تقسیم کنیم

مربع سحری جدیدی بدست میآید .

حل مسائل ذیل بر عهد متعلم است .

۱- مربع سحری ذیل دهید که شامل ۴۹ عدد اول باشد

۲- مربع سحری نه خانه تشکیل دهید که مجموع هر سطر یا ستون یا

قطرش ۴۵ باشد

۳- مربع سحری ۲۵ خانه تشکیل دهید که مجموع هر سطر یا ستون یا قطرش ۱۱۵ باشد



۳- فرض کنیم  $k$  عدد صحیح باشد بزرگتر از  $d$  (در مجموع اعداد واقع  
 در یک سطر یا یک ستون یا یک قطر مربع  $n$  می باشد) ثابت  
 کنید که اگر  $\frac{k-d}{n}$  عدد صحیح باشد برکردن مربع  $n$  می که مجموع ارقام  
 واقع در یک سطر یا یک ستون یا یک قطر  $k$  باشد ممکن است.

---

## فصل سوم

## اجرای عمل انصافی بر کثیر الجمله

۱۶- تعریفات - کثیر الجمله رشته ایست از یک جمله با که با علامت + یا

- از یکدیگر جدا شده باشد مانند عبارات  $\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{b}{x^2} - \frac{a\sqrt{c}}{x^3}$

$$ax^2 + bx + c, 5a - x^2 + 1 + xy$$

ممکنست بعضی از یک جمله با مثل یک کثیر الجمله مشابه باشند و در اینصورت

باید عمل تحول جمله را در آنها بگری داشت

مسئله کثیر الجمله  $x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 3x + 6x^2 + 7a$  را مختصر کنید

حل - واضحست که  $-2x^2 - 5x^2 + 6x^2 = -x^2$  پس اگر در

کثیر الجمله مفروض بجای  $(-2x^2 - 5x^2 + 6x^2) - x^2$  قرار دهیم حاصل میشود

$$x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 3x + 6x^2 + 7a = x^3 - x^2 + 3x + 7a$$

مسئله کثیر الجمله  $y^3 - xy^2 + y^3 - 5xy^2 + 6y^3 - x^3 + 1$  را مختصر کنید

حل - اگر کثیر الجمله فوق را به P بنمایم :

$$P = y^3 + y^3 + 6y^3 - xy^2 - 5xy^2 - x^3 + 1$$



خلاصه  $-xy^2 - 5xy^2 = -6xy^2$ ،  $y^3 + y^3 + 6y^3 = 8y^3$  پس

$$P = 8y^3 - 6xy^2 - x^3 + 1$$

مقدار دیگر جمله  $ax^2 + by^2 - 3ax^2 - 2by^2 + 3xy$  را مختصر کنید

$$(\text{جواب } 3xy - 2ax^2 - 2by^2)$$

۱۷- جمع چند کثیر الجمله - برای جمع چند کثیر الجمله کافی است که آنها را بتالی یکدیگر

نوشته کثیر الجمله حاصل را مختصر کنیم

گاهی اوقات مناسب است که جل تشابه کثیر الجمله را از زیر یکدیگر بنویسیم تا  
حساب آنها را استون بستون جمع کنیم

مقدار دیگر جمله  $va + vb$ ،  $va - vb$  را جمع کنید

حل - موافق قاعده اول :

$$(va - vb) + (va + vb) = va - vb + va + vb \\ = 2a + 0b$$

مقدار  $B = 7x^2 - 11y^2 + 14xy$ ،  $A = 5y^2 + 4x^2 - 3xy$

باشد  $A + B$  را حساب کنید

حل - چون جل تشابه کثیر الجمله را از زیر یکدیگر بنویسیم حاصل میشود :

$$A = 5y^2 + 7x^2 - 2xy$$

$$B = -11y^2 + 7x^2 + 14xy$$

$$A+B = -6y^2 + 14x^2 + 12xy$$

سوال اگر  $A = x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$ ،  $B = 2x^4 - 1x^3 - x - 15$ ،

$C = x - x^5$  و  $D = -1 - 9x^4 + 2x^2$  باشد  $A+B+C+D$

چقدر است

حل - چون جملات مشابه یکدیگر را با هم جمع می‌کنیم حاصل می‌شود

$$A = x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$$

$$B = 2x^4 - 1x^3 - 15 - x$$

$$C = x - x^5$$

$$D = -9x^4 + 2x^2 - 1$$

$$A+B+C+D = -5x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 15 + 0 - x^5$$

$$A+B+C+D = -5x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 15 - x^5$$

۱۸- تعریف - کثیرالبجه است یکی از حروفش مرتب خوانند وقتی جمله  
بعضی مرتب شده باشد که نمایند آن حرف در کثیرالبجه دانند ترقی یا تنزیل کند



مثلاً کثیر الجمله  $5x^3 - 4x^2 + 5x - 9x$  بر حسب قوای  $x$  و کثیر الجمله

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  بر حسب قوای  $a$  و  $b$  بالاخر

کثیر الجمله  $9 + y + y^2 - y^4 + y^6$  بر حسب قوای  $y$  مرتب است

اگر وقتی از چپ بر است شروع بخواند کثیر الجمله کنیم نماینده یکی از حروف

حال ترتیبی باشد گویند کثیر الجمله بر حسب قوای صعودی آن حرف مرتب شده

در صورت عکس گویند کثیر الجمله بر حسب قوای نزولی آن حرف مرتب باشد

مثلاً کثیر الجمله  $5x^2 + 3x - 7$  بر حسب قوای نزولی عدد کثیر الجمله

$a^2 + 2ab + b^2$  بر حسب قوای نزولی  $a$  و قوای صعودی  $b$  مرتب

شده است. وقتی بخوانیم چند کثیر الجمله را جمع کنیم تقسیمی که مجموع بر حسب قوای

صعودی یا نزولی یکی از حروف مرتب باشد کافی است که قبل از اجرای عمل

جمع کثیر الجمله های مفروض را بر حسب قوای صعودی یا نزولی آن حرف

مرتب کنیم چنانکه زیلاً مشاهده میشود:

مسئله کثیر الجمله های  $A = a^5 - a^3 + 2a^2$  و  $B = 3a^2 + 5a^3 - 6a^5$

و  $C = 2a^5 + 7a^2 - 14a^3 + 1$  و  $D = a + a^2 - a^3 + 10$

را تقسیمی جمع کنید که مجموع بر حسب قوای صعودی  $a$  مرتب باشد

حل - ابتدا کثیرالاجزاء  $A, B, C, D$  را بر حسب قوای صعودی  
 $a$  مرتب نموده حاصل تمثای آنها را زیر هم می‌نویسیم و بعد عمل جمع را تجزیه می‌داریم

$$A = -a^3 + 2a^4 + a^5 \quad \text{این شکل}$$

$$B = \dots + 3a^2 + 5a^3 - 9a^5$$

$$C = 1 + 7a^2 - 14a^3 + 2a^5$$

$$D = 1 + a + a^2 - a^3$$

$$A+B+C+D = 11 + a + 11a^2 - 11a^3 + 2a^4 - 9a^5$$

سده کثیرالاجزاء  $P = 1 - x^2 + x$  و  $Q = -x + 1 + x^2$ ،  
 $R = x - 1 + x^2$  و  $S = -x + x^2$  را تقسیمی جمع کنید که مجموع بر حسب قوای  
 نزولی  $x$  مرتب باشد:

حل - ابتدا کثیرالاجزاء  $P, Q, R, S$  را بر حسب قوای نزولی مرتب  
 نموده و آنها را با هم جمع می‌کنیم. این شکل:

$$P = -x^2 + x + 1$$

$$Q = x^2 - x + 1$$

$$R = x^2 + x - 1$$



$$S = x^f - x$$

$$P + Q + R + S = x^f + x^r - 1$$

مسئله بنابر آنکه  $B = x^r - x^f$ ,  $A = 2x^r - x + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$

$A + B + C + D$  باشد  $D = x - x^r - 2x^3 - 3x^4$ ,  $C = -x^r - 2x^3 - 5x^5$ :

را بدست آوریم مسئله باید بدو طریق حل شود (جواب صفر)

مسئله مجموع سه کثیرالجهت ذیل را بدو طریق حساب کنید

$$P_1 = x^r + x y^r + x z^r - x^r y - x^r z - x y z$$

$$P_2 = y^r - x y z + y z^r - y^r z + y x^r - x y^r$$

$$P_3 = z^r - x z^r - x y x + 2x^r - y z^r + 2y^r$$

(جواب  $x^r + y^r + z^r - 3xyz$ )

مسئله مجموع کثیرالجهت های  $a^r + b^r - c^r + d^r$ ,  $a^r + b^r + c^r - d^r$

$a^r - b^r + c^r + d^r$  و  $d^r + c^r + b^r - a^r$  چهارست بدو طریق

(جواب  $2a^r + 2b^r + 2c^r + 2d^r$ )

مسئله فرض کنید  $C = x^r + x^r - 1$ ,  $B = x + x^r - x^f$ ,  $A = x^5 + 1$

$F = -x^r - x^r - x - 1$ ,  $E = x^r + x^3 + x^r + x$ ,  $D = x^r + x + 1$

$$A + B + C + D + E + F + G, G = 1 - 2x^2 - x^5 - 3x^7$$

بدون طریق حساب کنید  
جواب:  $1 - 2x^2 + x^3 - 2x^5$

۱۹- تقسیر تق - برای تمیز کردن دو کثیرابعد - علامت جمع مفروق را

تغییر داده حاصل را با مفروق منته جمع کنیم

$$P = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 5 \quad \text{سه مطلوبت تفاضل دو کثیرابعد}$$

$$Q = 3 + 6x^3 - 5x^2 - x$$

حل - بنا بر قاعده فوق باید علامت جمع  $Q$  را تغییر داده آنرا با  $P$  جمع کنیم

$$P - Q = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 5 + (-3 - 6x^3 + 5x^2 + x)$$

$$= 5x^3 + 4x^2 - 7x + 5 - 3 - 6x^3 + 5x^2 + x$$

$$= 2 - 6x + 9x^2 - x^3$$

ساده عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$A = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 + b^3 - 3a^2b)$$

حل - مقصود از عبارت فوق تفاضل دو کثیرابعد  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

است پس چون موافق قاعده تمیز

عمل کنیم چنین خواهیم داشت :



$$\begin{aligned}
 A &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + (-a^3 - b^3 + 3a^2b) \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 + 3a^2b \\
 &= 6a^2b + 3ab^2
 \end{aligned}$$

مسئله چهارم:  $a - b - (a + b)$  را مختصر کنید

حل: باید علامت قبل  $a + b$  را تغییر داده آنرا با  $a - b$  جمع کرد حاصل شود:

$$a - b - (a + b) = a - b + (-a - b) = a - b - a - b = -2b$$

مسئله ثابت کنید که:  $a - (a - b) = b$ ,  $a - (b - a) = 2a - b$

مسئله ثابت کنید که  $a + (a - b + 4a) = 6a - b$

مسئله چهارم: با  $a$  جمع کرد و تا حاصل  $2a$  شود

راه حل: کثیرا بکثره مطلوب تفاضل  $2b$ ,  $a$  است (جواب  $2b - a$ )

مسئله ثابت کنید که:  $a - b - (a - b) = 0$ ,  $a + (b - a) = b$

مسئله تحقیق کنید که:  $a - (a + b - c - d) = c + d - b$

مسئله مطلوب است مجموع پنج کثیرا بکثره  $3x^3 + 7 + 9x - 10x^2 + 5x^2$

$$3x^3 - x^2 - 9x, 4x - 2x^2 + 2x^2, 2x^2 - 1 - 9x$$

$$x - x^2 - x^3 + 4, \quad \text{جواب } 3x - 2x^2 - 7x + 3$$

می‌نویسند که :

$$2a + (c - 2a) = c - 2a \quad ; \quad 4x - (2x + x^2) = 2x - x^2$$

$$3x + 1x^6 - 5x^2 + 3x^6 - 2x^2, x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$$

$$2x^6 + x^5 + 2x + 5 + 2x - 6 \quad \text{مجموع } x^5 + 4x^3 + 15x^2 - 1$$

$$2x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 2x^3 \quad (\text{جواب } 1 + x^6)$$

بقول علامه ... واضح است که :

$$a + (m - c + d - e) = a + m - c + d - e$$

$$x + (b + c - d - f) = x + b + c - d - f$$

$$a - (m + r + k + n) = a - m - r - k - n$$

$$c - (x + y - a - b) = c - x - y + a + b$$

و غیره - در طرف اول تساوی اول دو معادله داریم  $m - c + d - e$

و  $b + c - d - f$  در داخل پرانتز می‌باشند و اینها

جلو آن علامت + قرار گرفت طرف دوم این تساویها عین طرف

اول است و فقط پرانتز آن حذف شده



در طرف اول دوت می نوم و چهارم در مقابل  $m + l + b + e$   
درگاه  $a - y + x$  در داخل پرانتز می قرار داند که بر آن علامت مقدم است  
در طرف دوم این پرانتز حذف شده اما یکت تغییر در مقدار پیدا و داخل آن علامت می شود  
و آن این است که علامت آنجا تغییر کرده است مثلاً  $m + l + b + e$

$$-x - y + a + b = x + y - a - b, -m - l - b - e$$

تبدیل شده — از این مطالب دو نتیجه ذیل بدست می آید :  
نتیجه ۱ - برای از بین بردن پرانتزی که بر آن علامت + مقدم است  
نویسندون پرانتز کنایت میکنند

نتیجه ۲ - برای از بین بردن پرانتزی که در جلو آن علامت - است  
عدد و بر محو کردن پرانتز باید علامت جمل واقع در داخل آنرا تغییر داد

مثلاً عبارت  $P = x^2 + 5xy - y^2 + (2x^2 - 4xy + 2y^2)$  را مختصر کنیم

حل - مقدم بر پرانتز عبارت فوق علامت + است پس از حذف  
آن مرتباً چنین خواهیم داشت :

$$P = x^2 + 5xy - y^2 + 2x^2 - 4xy + 2y^2$$
$$= 3x^2 + xy + y^2$$

سوی عبارت ذیل را مختصر کنید .

$$P = 2x^2 - xy + (2x^2 - y^2 - xy) + (4xy + 2y^2)$$

حل - برآیند را در موافق قیود (۱) حذف میکنیم و می‌شود :

$$P = 2x^2 - xy + 2x^2 - y^2 + xy + 4xy + 2y^2$$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2$$

سوی عبارت  $P = x^2 - (2x^2 + y^2 - xy)$  را مختصر کنید .

حل - مقدمه بر عبارت فوق علامت - است پس موافق قیود (۲)

این برآیند را حذف کرده بجای آن  $x^2 - y^2 + xy$

قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$P = x^2 - 2x^2 - y^2 + xy = xy - y^2 - x^2$$

سوی عبارت  $P = 2x + 1 - (x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$  را مختصر کنید .

حل - بد خطه قیود (۲)  $P$  را میتوان به صورت نوشت :

$$P = 2x + 1 - x^3 - 3x^2 - 2x - 1$$

$$= -x^3 - 3x^2$$

سوی عبارت ذیل را مختصر کنید



$$Q = x^2 - 3x + (x^2 - 7x - 6) - (-2x^3 + 2x^2 + 1)$$

حل: اندم به استند اول علامت + و مقدم به استند دوم علامت - قرار دارد چون آنها را حذف کنیم بهر شود:

$$P = x^2 - 3x + x^2 - 7x - 6 + 2x^3 - 2x^2 - 1$$

$$P = 2x^3 - 10x - 7$$

یا:

مذبحه عبارت است:  $A = a + b - (a - b) - (rb - a)$  کن

حل: انقضت  $A = a + b - a + b - rb + a = a$

مذبحه تحقق کنید که:  $a - (-a) + (-ra) = 0$

مذبحه تحقیق کنید که:  $a - (b - c) = a + c - b$ ,  $a - (a + b) = -b$

مذبحه ثابت کنید که:

$$a = (b - c) + a + (b - c) + b - (c + a) = a + b - c$$

مذبحه ثابت کنید که:

$$a - 2b - (ra - 5b - 3a + c - 5a + 4b + 3a - c) = 2a$$

مذبحه ثابت کنید که:  $-(-x^3 + 2x^2 - 5x - 1) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

مذبحه عبارت است:  $A = a - b - [ra - b - (rb - 3a)]$  انقضت

عبر - متصوود از عبارت فوق است که تفاضل  $2b-3a, 3a-b, 1$

از  $a-b$  کم کنیم. خلاصه  $(3a-b)-(2b-3a)=5a-3b$

$$A=a-b-[5a-3b]=2b-4a \quad \text{پس}$$

$$a+[2a+c-(a+c-1)]=2a+1 : \text{سند تحقیق کنید که}$$

$$a+[(2a+x)-(2a-x)]=2x : \text{سند تحقیق کنید که}$$

$$4a-[a^2+2a+1-(a^2-2a+1)]=0 : \text{سایا بت کنید که}$$

سند عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$P=1-[1-(2-x)]+[2x-(3-6x)]+[4-(6x-5)]$$

$$2x-(3-6x)=, 1-(2-x)=x-1 \quad \text{تل - اوضحت که}$$

$$4-(6x-5)=9-6x, 10x-3 \quad \text{پس}$$

$$A=1-(x-1)+(10x-3)+(9-6x)$$

$$=1-x+1+10x-3+9-6x=4+5x$$

سند تحقیق کنید که :

$$a-b-[b+c-d-(b+c-d)-(2b-a)]=2$$



سؤ عبارتت ذیل را مختصر کنید .

$$x = a - \{3a - 2c + 1 + 2b - 2c - [a - (a - b - c)]\}$$

فرض - مقصود از این عبارت این است که  $a - (a - b - c)$

$3a - 2c + 1 + 2b - 2c$  نقصان نموده بیا فایده را از  $a$  کم کنیم

$$3a - 2c + 1 + 2b - 2c = a - (a - b - c) = b + c \quad \text{خلاصه}$$

$$3a - 2c + 2b + 1$$

$$x = a - \{3a - 2c + 2b + 1 - [b + c]\}$$

$$= a - \{3a - 2c + 2b + 1 - b - c\}$$

$$= a - \{3a - 5c + b + 1\} = 5c - 1 - b - 2a$$

ایند - محقق کنید که

$$(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) = b + c - a$$

$$[a - (b - c)] + [b - (c - a)] - [c - (a - b)] = 3a - c - b$$

$$x - \{y + [x - (y + x)]\} = x$$

$$12a - \{(a + b) - [b - (a - b)] - a\} = 11a + b$$

$$-\{-2x - [2y - (2x - 2y) + (2x - 2y) + 2x]\} = x + 2y$$

$$x - \{y + z + [x - (x + y + z)]\} = x$$

$$11a - \{a + b - [b - (a - b)] - a\} = 11a + b$$

$$- \{-rx - [ry - (rx - ry) + (rx - ry)] + rx\} = x + ry$$

$$- \{a - [b - (c - a)]\} - \{b - [c - (a - b)]\} = a + b$$

$$ra - b - (ra - rb) + (ra - rb) - (a - rb) = 0$$

$$a^r - \{ra^r - (ra^r - ra + 1)\} - \{-r - [a^r - (-ra^r - ra + ra)] - (1a - 1)\} \\ = ra^r + 1ra^r + r$$

شماره اول و دوم بر آید

$$a + (b - c - d) = a + b - c - d \quad \text{وضاحت:}$$

$$a - (b - c - d) = a - b + c + d$$

$$(b + c) - a + d = b + c - a + d$$

$$a + (b - c) - d = a + b - c - d$$

$$a + b - c - d = a + (b - c - d) \quad (۱) \quad \therefore$$

$$a - b + c + d = a - (b - c - d) \quad (۲)$$

$$b + c - a + d = (b + c) - a + d \quad (۳)$$

$$a + b - c - d = a + (b - c) - d \quad (۴)$$



در طرف اول یچک از چهار تساوی اخیر پراشته موجود نیست ولی :

اولاً در طرف دوم سه تساوی (۱)، (۳) و (۴) مقدار  $b-c-d$  را

$b+c$  ،  $b-c$  داخل پراشته می شود و آنکه بر آن

علامت + مقدم است و تغییر دیگری در آن با عارض نشود و ثانیاً در

طرف دوم تساوی (۲) مقدار  $b+c+d$  داخل پراشته می که

جلو آن علامت - است شده است اما علامت آن تغییر کرده است

نتیجه ۱ - هر جز از عباراتی را میتوان داخل پراشته قرار داد  
که جلوی آن علامت + باشد

نتیجه ۲ - هر جز از عباراتی را میتوان داخل پراشته قرار داد  
که مقدم بر آن علامت - باشد بشرط آنکه علامت جل آن جز را تغییر دهیم

مثال - عبارت  $ax - bx + cx - ay + by - cy$  را

میتوان باین صورت نوشت

$$(ax - bx) + (cx - ay) + (by - cy)$$

$$(ax - bx + cx) - (ay - by + cy)$$

$$(ax - ay) - (bx - by) + (cx - cy)$$

مسئله - میخواهیم به جمله آخر عبارت  $2x^2 - 5x - 9a + 1$  را داخل پرانتز  
بر آن علامت + باشد قرار دهیم

حل - بنا برتبیجه (۱)

$$2x^2 - 5x - 9a + 1 = 2x^2 + (-5x - 9a + 1) = 2x^2 + (1 - 9a - 5x)$$

مثلاً دو جمله اول عبارت دیگر را در پرانتزی که بر آن علامت - مقدم  
باشد و دو جمله آخرش را در پرانتزی که بر آن علامت + مقدم باشد

قرار دهیم :  $P = ax^4 - bx^3 + cx^2 - v + 3x$

حل :  $P = -(bx^3 - ax^4) + cx^2 + (3x - v)$

یا :  $P = (3x - v) + cx^2 - (bx^3 - ax^4)$

مثلاً دو جمله اول هر یک از عبارات دیگر را در پرانتزی که بر آن علامت +  
مقدم باشد و دو جمله باقی را در پرانتزی که بر آن علامت -  
مقدم باشد قرار دهیم

$$1 + ax^2 - cx^3 + mx - 2x^3 - 2a$$

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + ex^5 - f$$

$$ax^n - bx^{n-1} - 2a^3 + 25a^2 - y - 2y^2$$



$$(1+ax^1)-cx^2+(-mx+2x^2)-2a \quad \text{جواب}$$

$$(ax^4-bx^3)+cx^2-(dx-ex^4)-f$$

$$(ax^n-bx^{n-1})-2a^3-(-25a^2+y)-2y$$

$$P = ax^6 - 3bx^5 + b^2x^3 - cx^6 - x^3 - ax^2 : \text{ عبارت}$$

را بچند جزء بقسمی تقسیم کنید که نماینده حرف  $x$  در جمیع جمل یکبار مساوی باشد

و بعد اولاً هر یک از این اجزاء را در پرانتز می که بر آن علامت + مقدم باشد

قرار دهید ثانیاً هر یک از این اجزاء را در پرانتز می که بر آن علامت - مقدم

باشد حاصل کنید

$$P = (ax^6 - cx^6) + (bx^3 - x^3) + (-3bx^5 - ax^2) : \text{ جواب}$$

$$P = -(cx^6 - ax^6) - (x^3 - bx^3) - (3bx^5 + ax^2) \text{ ثانیاً}$$

مسئله - همین عمل را در کشیر ابعده ذیل مجرب کنید

$$Q = x^5 + 1 + x^6 - ax^5 - 2bx^5 + cx^6 - c + x^5 + x$$

$$Q = (x^5 - ax^5) + (cx^6 + x^6) + (x^5 - 2bx^5) + (x) + (1 - c) \text{ (جواب)}$$

$$Q = -(ax^5 - x^5) - (-cx^6 - x^6) - (2bx^5 - x^5) - (-x) - (c - 1)$$

## ۲۲- ضرب یک جمله در چند جمله

فان در ضرب یک جمله در چند جمله از اصل ذیل استنباط می شود :

اصل - برای ضرب یک عامل در مجموع چند عامل کافی است که آن عامل را در هر یک از عوامل جمع جبری ضرب نموده حاصلها را جمع جبری کنیم مثلاً

$$m(a+b-c-d) = ma + mb - mc - md$$

مثلاً میخواهیم  $3(2+7-9-16-1+10-4+2)$  ضرب کنیم

حل - بنا بر اصل فوق :

$$3(2+7-9-16-1+10-4+2) = 3 \times 2 + 3 \times 7 - 3 \times 9 - 3 \times 16 - 3 \times 1 + 3 \times 10 - 3 \times 4 + 3 \times 2$$

$$= 6 + 21 - 27 - 48 - 3 + 30 - 12 + 6 = -21$$

مثلاً مطلوب است حاصل ضرب  $2a, 3a-5b+ac+1$

حل - اگر حاصل ضرب مطلوب را  $P$  بنامیم

$$P = 2a \times 3a - 2a \times 5b + 2a \times ac + 2a \times 1$$

$$= 6a^2 - 10ab + 2a^2c + 2a$$

در عبارت  $x(x-1) - 3(x-1)$  را مختصر کنید

حل - واضح است که  $x(x-1) = x^2 - x$  و  $3(x-1) = 3x - 3$



$$x(x-1) - 2(x-1) = (x^2 - x) - (2x - 2)$$

$$= x^2 - x - 2x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

عسله تحقیق کنید که :

$$3(2-7) = -15, 2(-1-2-2+1) = 4, 7(5+3+2) = 70$$

$$2(35-2,4+3,4) = 9, 3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) = -1, 2(7+1) = 16$$

مسئله تحقیق کنید که :

$$3x(5x^4 + 2x^3 + 7x - 1) = 15x^5 + 6x^4 + 21x^2 - 3x$$

$$a\left(x^2 + \frac{x}{a} + \frac{c}{a^2}\right) = ax^2 + x + \frac{c}{a}$$

$$2(x^3 + 1,5x^2 + 1x + 2,5) = 2x^3 + 3x^2 + 15x + 7$$

مسئله عبارت  $a(a+2c-b) + 2b(a-b+2c)$  را مختصر کنید

جواب  $a^2 + ab + 2ac - 2b^2 + 5bc$

مسئله عبارت  $x^2(2x+1) - (2x^3-1)$  را مختصر نمایید.

جواب  $x^2+1$

مسئله تحقیق کنید که :  $3x^2(x^2 + \frac{1}{3}x + 1) = 3x^4 + x^3 + 3x^2$

مسئله تحقیق کنید که  $a.m(m+2m+5) = am^2 + abm^2 + 5am$

مسئله ثابت کنید که :  $3m^2(1+2m) = 3m^2 + 6m^3$

سوی ثابت کنید که:  $-x^n(1-x^n+x^{2n}-x^{3n})=x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}-x^n$

سوی ثابت کنید که:  $P=ra^r(ra^r+ra^r+ra-r)-$

$$ra \cdot ra^r+ra^r+ra-r) - r(ra^r+ra^r+ra-r)$$

$$=ra^5-ra^4-1 \cdot a^3-ra^2-ra+6$$

طریق اثبات - باید ملاحظه کرد که:

$$P=ra^5+9a^4+1a^3-ra^2-(1a^4+12a^3+19a^2-1a)$$

$$-(9a^3+9a^2+12a-6)$$

سوی ثابت کنید که اگر  $y=ab+bc+ca$  ,  $x=-(a+b+c)$

$$a^3+a^2x+ay+x=0 \quad \text{باشد} \quad x=-abc,$$

مسئله - با همان مفروضات ثابت کنید که  $b^3+b^2x+by+x=0$

مسئله - مطلوبیت با مقدار عبارت  $bx+cy+ax$  بازا،

$$x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$$

(جواب  $a^3+b^3+c^3$ )

مسئله - مطلوبیت مقدار  $x=a-b, y=ax-a^2+bx-b^2$

(جواب  $-3b^2-ab$ )



مسئله - ثابت کنید که :

$$(x+y)^r [(x+y)^r + (x+y)^{r-1} + (x+y)^{r-2} + \dots + 1] =$$

$$(x+y)^{r+1} + (x+y)^r + (x+y)^{r-1} + \dots + (x+y)^0$$

مسئله - تحقیق کنید که :

$$x^n(x^n - y^n) + y^n(x^n - y^n) = x^{2n} - y^{2n}$$

$$b^m(1+b-b^2+b^3-\dots) = b^m - b^{m+1} + b^{m+2} - b^{m+3} + \dots$$

۲۳- تقسیم شیرانجمله بر یک جمله

قاعده تقسیم شیرانجمله بر یک جمله از فصل ذیل استنباط می شود .

افضل - برای تقسیم مجموع جبری چند عامل بر یک عامل کافی است

یک از عوامل جمع جبری را بر عامل منفرد منقسم نموده خارج قسمت های

جداگانه را جمع جبری کنیم مثلا :

$$\frac{a+b-c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

مسئله مطلوب است خارج قسمت  $100 + 64 - 32 - 16$  بر ۴

حل - از اصل فوق معلوم می شود که :

$$(100 + 64 - 32 - 16) : 4 = \frac{100}{4} + \frac{64}{4} - \frac{32}{4} - \frac{16}{4}$$

$$= 25 + 16 - 8 - 4 = 29$$

ساز - بنویسیم  $x^2 + xy^2 + y^3$  بر  $x^2y$  تقسیم کنیم

$$\frac{x^2 + xy^2 + y^3}{x^2y} = \frac{x^2}{x^2y} + \frac{xy^2}{x^2y} + \frac{y^3}{x^2y}$$

$$= \frac{1}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

ساز - مطلوب است خارج قسمت تقسیم  $x^2y^3 - x^2y - xy$  بر  $xy$

نکته - به این است که:

$$(x^2y^3 - x^2y - xy) : xy = \frac{x^2y^3}{xy} - \frac{x^2y}{xy} - \frac{xy}{xy}$$

$$= xy^2 - x - 1$$

پس تحقیق کنید که:

$$\frac{1 + 19r + 50}{r} = r^2, \quad \frac{5r^2 - 120 + 7 + 5r^2 - r^2}{10} = 5r$$

$$\frac{x^2 + y^2 - 20xy}{x^2} = x + \frac{y^2}{x^2} - \frac{20xy}{x}$$

$$\frac{5x^2 + 10x^2y^2 + 20xy}{15x - 2x - 1x} = x^2 + 2xy^2 + 4y$$

پس تحقیق کنید که:

$$\frac{x^m + x^{m-2}}{x^{m-2}} = x^2 + 1, \quad \frac{2x^m + 3x^{m-2}}{x^{m-2}} = 2 + 3x^2$$

$$\frac{c^{2+r} + c^{2+r} - 2c^{2+5} - 3c^{2+5}}{c^{2+r}} = c + c^2 - 2c^3 - 3c^3$$

$$\frac{y^m - 2y}{y^2} = -y^{m-2} + \frac{2}{y^2}$$

پس تحقیق کنید که:



$$\frac{x^3y^2 - 5x^2y^3 + x^4y}{-xy} = 5y^2 - x^2y - 1$$

$$\frac{(a+b)^5 + (a+b)^3}{(a+b)^2} = (a+b)^3 + a+b$$

در تخمین کنید که :

ساده‌ترین کنید که :

$$\frac{x^3y^2 + y^3x^2 + x^4y + y^4x}{x^5} = \left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)$$

باید ملاحظه کرد که  $\frac{y^4}{x^5} = \left(\frac{y}{x}\right)^4$  و غیره .

ب. تغییر اشیاء - وقتی یک عبارت جبری حاصل ضرب دو یا چند عبارت

دیگر باشد مرکبات از این عبارات را عامل عبارت اول خوانند مثلاً

عوامل  $3ax^3 - 3ax$  عبارتند از  $3a$  و  $x^2 - x$  زیرا

$$3a(ax^3 - x) = 3ax^4 - 3ax$$

$$ax(ax^2 + x + a) = ax^3 + ax^2 + ax, \quad ax^2 + x + a, \quad ax$$

اگر ملاحظه کنیم که  $3ax^3 - 3ax = 3a \cdot x^2 - 3a \cdot x$  و نیز  $ax^3 +$

$$ax^2 + ax = ax \cdot ax^2 + ax \cdot x + ax \cdot a$$

پس عامل  $3a$  و در کلیه عمل عبارت ثانی عامل  $ax$  موجود است

چنین عواملی را عوامل مشترک خوانند

مثلاً ثابت کنید که عوامل  $x^2 + 2ax$  عبارتند از  $x$  و  $x+2a$

سند - ثابت کنید که توان اول  $a^2x + abx + a^2y$  عبارتند از  $ax + b + ay^2$

سند - عامل مشترک جل عبارت  $a^2 - 2a^2 + a^2x$  چیست (جواب:  $a^2$ )

سند - عامل مشترک جل عبارت  $x^2 + x^4 - ax^2$  را تعیین کنید (جواب:  $x^2$ )

### ۳۵- عامل مشترک گرفتن

مجموع جبری چند عامل که دارای عامل مشترکی باشند مساوی است

بجای ضرب آن عامل در خارج قسمت مجموع اصلی بر عامل مشترک مفروض

مثال - ۱- در جمیع جل عبارت  $1a^3 + a^2 - ab$  عامل مشترک چیست پس:

$$1a^3 + a^2 - ab = a \left( \frac{1a^3 + a^2 - ab}{a} \right) = a(1a^2 + a - b)$$

مثال - ۲- در جمیع جل عبارت  $2a - 1ab + 4ac$  عامل مشترک چیست پس:

$$2a - 1ab + 4ac = 2a \left( \frac{2a - 1ab + 4ac}{2a} \right)$$

$$= 2a(1 - \frac{1}{2}b + 2c)$$

مثال - ۳- در جمیع جل عبارت  $5(x+1) - x(x+1)$  عامل

$x+1$  مشترک است پس:

$$5(x+1) - x(x+1) = (x+1) \left[ \frac{5(x+1) - x(x+1)}{x+1} \right]$$

$$= (x+1)[5 - (x+1)x] = (x+1)(5 - x^2 - x)$$



این عمل را عامل مشترک گرفتن خوانند  
 پس نتیجه تحقیق کنید که :

$$۸-۶=۲(۴-۳) , ۹-۱۵=۳(۳-۵) , ۲-۴=۲(۱-۲)$$

$$۱۴-۲۱=۷(۲-۳) , ۱,۵-۲,۲۵=۱,۵(۱-۱,۵) , ۲-۷=۲(۱-۳,۵)$$

$$a^r + a^r = a^r(a+1) , a^r + a = a(a+1) , ۲-۰=۲(۱-۰)$$

$$a^r + a^0 - a^r - a^r = a^r(a^r + a^r - a - 1)$$

$$x^r y^r + x^r y + x y = x y (x y + x^r + 1)$$

$$a b x - a c x - a b c x = a x (b - c - b c)$$

$$a x^r + b x + c = a (x^r + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a})$$

$$a^r b - a^r b^r + a^r b = a^r b (1 - b^r + 1)$$

$$۵b^r c + ۱۰b^r c^r - ۱۵a b c = ۵b c (b + ۲b^r c - ۳a)$$

پس ثابت کنید که :

$$۱۵a^r x^r - ۳۰a^r x^r + ۱۰۵a^r x^r - ۷۵a^r x^5 =$$

$$۱۵a^r x^r (1 - ۲x + ۷x^r - ۵x^5)$$

پس ثابت کنید که :

$$x^{m+n} y^m - x^n y^{m+n} = x^n y^m (x^m - x^n y^n - y^m)$$

مرد ثابت کنید که :

$$1^r x^r y - 1^r x^r y^r = 1^r x^r y (x^r - y^r)$$

$$x(x-a) + y(x-a) = (x+y)(x-a)$$

مرد ثابت کنید که :

مرد ثابت کنید که :

$$a^r(x+1)^r + b^r(x+1)^r = (x+1)^r (b^r + a^r + a^r \hat{a})$$

مرد تحقیق کنید که :

$$r! a^r b^r c^r - r! a^r b^r c^r + r! a^r b^r c^r = r! a^r b^r c^r (r! a^r - r! b^r + c^r)$$

$$x^r + y^r - z^r = -(z^r - x^r - y^r)$$

اثبات - کافی است که در طرف اول - را عامل مشترک قرار دهیم

حاصل میشود

$$x^r + y^r - z^r = -1 \left( \frac{x^r + y^r - z^r}{-1} \right) = -(-x^r - y^r + z^r)$$

$$= -(x^r - x^r - y^r)$$

مرد ثابت کنید که :



$$x^r - 2ax - a^2 - x^r - 2x = - (x^r + 2x + a^2 + 2ax - x^r)$$

پسند - کشیر اجمه های زیر را بر حسب ای نزولی و مرتب کنید

$$P = x^v - 2x + ax^u - a^2b + cx^r - dx + x^s$$

$$Q = x^t - x^r - (xy)^r + x^r y^r - a^2 x^u + x^t - x^u - 1$$

$$P = x^v + x^s + ax^u + cx^r - x(d+2) - a^2b \quad \text{جواب}$$

$$Q = -x^u(a^2+1) + 2cx^r - x^r y^r + x^r y^r - 1$$

سند ثابت کنید که

$$x^m - y^m + x^n y^n - x^n - y^n =$$

$$x^n(y^n - 1) - (y^n + y^m - x^m)$$

پسند ثابت کنید که :

$$a - b = - \{ - [ - (b - a) ] \}$$

$$2^m \cdot 2^m - 2^m = 2^m (2^m - 1)$$

۲۶- ضرب دو کشیر اجمه

برای ضرب کردن دو کشیر اجمه کافیت بر یک از جل مضروب را با علامت

علامت آن در اندیک از جل مضروب فیه ضرب نموده حاصل ضرب را

خوبه را جمع کنیم. برای سولت عمل جمع باید مثل مشابه حاصل ضربهای زیر را  
زیر یکدیگر نوشت.

مثلاً حاصل ضرب - دو کثیرالاجزای  $x - y$  و  $2x + 5y$  را تعیین کنید.

حل - صورت عمل چنین

$$\begin{array}{r} x - y \\ 2x + 5y \\ \hline A = 2x^2 - 2xy \\ B = \phantom{2x^2} + 5xy - 5y^2 \\ \hline 2x^2 + 3xy - 5y^2 \end{array}$$

توضیح - حاصل ضرب جمله اول مضروب  $(2x)$  در جمله اول مضروب  $(x)$  است.  $2xy$  حاصل ضرب جمله اول مضروب  $(2x)$  در جمله دوم مضروب  $(-y)$  میباشد. حاصل ضرب جمله دوم مضروب  $(5y)$  در جمله اول مضروب  $(x)$  است.  $-5y^2$  حاصل ضرب جمله دوم مضروب  $(5y)$  در جمله دوم مضروب  $(-y)$  میباشد. (دو جمله مشابه  $-2xy$  و  $+5xy$  را زیر هم نوشته ایم) از جمع دو کثیرالاجزای

$A$  و  $B$  حاصل ضرب مطلوب بدست میآید

ممکن است عمل را با اینصورت اجرا کرد:

$$(x - y)(2x + 5y) = 2x^2 - 2xy + 5xy - 5y^2 = 2x^2 + 3xy - 5y^2$$



باید دانست که وقتی که مضروب و مضروب فيه دو کثیرا بجز مختصر باشند  
اجرای عمل با بصورت سهلتر است و در مواقع دیگر طریق اول مرجح میباشد

سده مطابقت حاصل ضرب  $a+b$  و  $a-b$

حل -  $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

سده حساب کنند حاصل ضرب  $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

حل - صورت عمل چنین است:

$$\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 \\ \times x - y \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2y + xy^2 \\ - yx^2 - xy^2 - y^3 \\ \hline x^3 \qquad \qquad - y^3 \end{array}$$

سده حساب کنید  $(a+b)^2$

حل - : وضاحت که  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$  پس

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

سده مطلوب است  $(a+b)^3$

حل - : وضاحت که :

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 (a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$\frac{a^r + rab + b^r}{a+b}$$

$$a^r + ra^r b + ab^r$$

$$a^r b + rab^r + b^r$$

$$(a+b)^r = a^r + ra^r b + rab^r + b^r$$

مثلاً اگر  $B = a + b$  و  $A = x^r + y^r + z^r + xy - xz - yz$

باشد  $A \times B$  را حساب کنید

حل - صورت عمل چنین است :

$$\frac{x^r + y^r + z^r - xy - xz - yz}{x+y+z}$$

$$\begin{array}{r} x^r + xy^r + xz^r - x^r y - x^r z - xy^r z \\ + y^r - x y^r \quad + y z^r \quad - x y z + y z^r - y^r z \\ + z^r \quad - x z^r \quad + z x^r - x y z - y z^r + y^r z \end{array}$$

$$x^r + y^r + z^r - 3xyz$$

پسند - ثابت کنید که

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1, (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

مثلاً ثابت کنید که  $(x+\delta y)(x-\delta y) = x^2 - \delta^2 y^2$

مثلاً ثابت کنید که  $(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3$



مسئله تحقیق کنید که:  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مسئله ثابت کنید که:  $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = x^4 - a^4$

مسئله ثابت کنید که:  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

مسئله مطلوبت محاسبه  $(a+b)^4$

طریق حل - با توجه کرد  $(a+b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$

جواب  $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

پسند تحقیق کنید که:

$$(a+b+c)(a+b-c) = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$$

$$(x+y+z)(x-y-z) = x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

پسند ثابت کنید که:

$$(2a+3b-c)(2a-3b+c) = 4a^2 - 9b^2 + 5bc - c^2$$

$$(x-2y-3)(x^2+4y^2+9-6y+3x+2xy) =$$

$$x^3 - 11y^3 - 27 - 11xy$$

$$(1-a-3a^2+a^3)(1+3a-a^2) = 1+3a-7a^2-4a^3+a^4$$

$$1 = x^2 + y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + b(a-1) + b(1-a)$$

$$A \times B \text{ باشد } B = x^2 + 2xy + y^2$$

$$+ 5x^2y + 10x^2y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

مستند ثابت کنید که:

$$(a^2 - 2a + 1)(a^{m+1} + 2a^m + a^{m-1})$$

$$= a^{m+3} - 2a^{m+1} + a^{m-1}$$

مستند ثابت کنید که:

$$(1 + 2x - 3x^2)^2 = 1 + 4x - 2x^2 - 12x^3 + 9x^4$$

مستند ثابت کنید که:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

مستند بدون اجرای عمل ضرب  $(x + y - z)^2$  را حساب کنید

حل کافی است در تساوی مستند فوق بجای  $z$  قرار دهیم  $-z$  بشود

$$[x + y + (-z)]^2 = x^2 + y^2 + (-z)^2 + 2xy + 2x(-z) + 2y(-z)$$

$$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$$

مستند بدون اجرای عمل ضرب  $(x - y - z)^2$  را بدست آورده صحت نتیجه حاصل را



عمل ضرب تکرار کنید

مثلاً ثابت کنید که  $(x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

مثلاً تحت تبادلی ذیل را عمل ضرب ثابت کنید:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$$

تجربه کنید

مسئله بدون عمل ضرب  $(x - y - z)^3$  را حساب نموده تحت نتیجه حاصل را عمل

مسئله - اگر

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd$$

$B = a + b + c + d$  باشد  $A \times B$  چقدر است

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc)$$

مسئله - مطلوب است حاصل ضرب و کشید اجماع ذیل

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2ux - xy - yu - ux - zx - yz$$

$$x + y + z + u$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 - 3xyz - 3yzu$$

جواب

مسئله - مطلوب است محاسبه حاصل ضرب و کشید اجماع ذیل

$$x+y, x^6-x^4y+x^2y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$$

$$x^7+y^7 \text{ جواب}$$

سده عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$x = (a-b)(c-d) + (a-c)(d-b) + (a-d)(b-c)$$

حل - بمن ضرب معلوم شود که :

$$(a-b)(c-d) = ac - cb - ad + bd$$

$$(a-c)(d-b) = +bc + ad - dc - ba$$

$$(a-d)(b-c) = -ac - bd + cd + ab$$

چون این سه عبارت را عضو به عضو جمع کنیم نتیجه می شود  $P=0$

سده عبارت ذیل را مختصر کنید

$$P = (a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2$$

حل - واضحست که :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(b+c-a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$$

$$(c+a-b)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$



از جمع این چهار تساوی نتیجه میشود  
 $P = 4(a^2 + b^2 + c^2)$   
 مسئله ثابت کنید که :

$$(a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a) + (c-a)(c+a-b) = 0$$

مسئله ثابت کنید که :

$$\pi h \left( \frac{R+r}{r} \right)^2 + \pi h \cdot \frac{1}{r^2} \left( \frac{R-r}{r} \right)^2 = \frac{\pi h}{r^2} (R^2 + r^2 + Rr)$$

مسئله ثابت کنید که :

$$(1+x+x^2+x^3)^2 = 1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$$

مسئله ثابت کنید که :

$$\frac{1}{9} [(r^2b+rc-a)^2 + (rc+ra-b)^2 + (ra+rb-c)^2] = a^2 + b^2 + c^2$$

مسئله ثابت کنید که :

$$(m^4 - n^4) + 2n(m^3 + n^3) - (m+n)^2(m-n)^2 = 2m^2n(m+n)$$

۲۷ ضرب چندشیرا بجمده - برای ضرب کردن چندشیرا بجمده در یکدیگر کافی است که حاصل ضرب دو کثیرا بجمده اول را در کثیرا بجمده سوم ضرب نموده و

و این حاصل را در کثیر السیر الجمله چنان ضرب کنیم و پس علیهذا الی آخره  
مسلّم تحقیق کنید که :

$$(c+d)(c-d)(a-b) = ac^2 + bd^2 - ad^2 - bc^2$$

تحقیق - واضحست که  $(c+d)(c-d) = c^2 - d^2$  پس

$$(c+d)(c-d)(a-b) = (c^2 - d^2)(a-b) =$$

$$ac^2 - ad^2 - bc^2 + bd^2$$

سایه حاصل ضرب ذیل را بدست آورید

$$(x^2+1)(x^2+x+2)(x^2+2x+2)$$

$$(x^6 + 3x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 6x + 6) \quad \text{: جواب}$$

مسلّم ثابت کنید که :

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x+1)^2$$

اثبات - بعمل ضرب و جمع معلوم میشود که :

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$$

$$(x^2+3x+1)^2 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$$

و تساوی این دو سمت را بدیهی است



مرد ثابت کنید که :

$$(a+b+c)^3 - 3(a+b)(a+c)(b+c) = a^3 + b^3 + c^3$$

مرد ثابت کنید که :

$$(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 - 3(b+c)(c+a)(a+b) \\ = 3(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

۸- تعریف - هرگاه پس از اجرای اعمال و اختصارات لازم طرفین تساوی

بین یکدیگر باشد آن تساوی را اتحاد خوانند مثلاً تساوی  $(a+b)^2 =$

$a^2 + 2ab + b^2$  اتحاد است و مقدار  $a^2 + b^2 + 2ab$  و  $(a+b)^2$

متحد و متحد بودن آنها با اینصورت مینمایند :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

از تعریف فوق معلوم میشود که مقدار عددی و عبارت متحد باز از جمیع

مقادیر عددی حروف آنها یکی است بقسمی که میتوان اتحاد را اینطور تعریف نمود :

هرگاه مقدار عددی طرفین تساوی باز از جمیع مقادیر عددی حروف آنها

مساوی باشد آن تساوی را اتحاد خوانند .

مسئله نخست اتحادهای ذیل را ثابت کنید .

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$$

۲۹. اتحاد فوق چنین بیان می شوند .

۱- مربع (مجدور) مجموع دو مقدار مساویست با مجموع مربعین آن دو با ضافه نصف حاصل ضرب آنها

۲- مربع تفاضل دو مقدار مساویست با مجموع مربعین آن دو منهای مضاعف حاصل ضرب آنها

۳- حاصل ضرب مجموع دو مقدار در تفاضل همان دو مقدار مساویست با فضل مربع مقدار اول بر مربع مقدار ثانی

۲۵. سؤله - مقدار عبارات ذیل را بدو طریق بدست آورید (طریق

اول ضرب - طریق دوم استعمال سه اتحاد فوق)

$$(x^x + y^y)^2 = x^x + y^y + 2x^x y^y, (\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1$$

$$(x+4)^2 = x^2 + 1x + 16 \quad (19+9)(19-9) = 19^2 - 9^2$$

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + 2 = 8 + 2\sqrt{12}$$



$$(a+rb)^r = a^r + r a^{r-1} b + r b^r, \quad (\sqrt{r} - \sqrt{r})(\sqrt{r} + \sqrt{r}) = 1$$

$$(x^{rm} + 1)(x^{rm} - 1) = x^{2rm} - 1, \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (a+b) - 2\sqrt{ab}$$

$$(x^r - y^r)^r = x^r - r x^{r-1} y^r + y^r, \quad (-1 + \sqrt{r})^r = r - r\sqrt{r} + 1$$

$$(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})(\sqrt{x+y} - \sqrt{y}) = x$$

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = x + \frac{1}{x} - r, \quad \sqrt[r]{a+b} \cdot \sqrt[r]{a-b} = \sqrt[r]{a-b^2}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x+1}{r}} + \sqrt{\frac{x-1}{r}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+1}{r}} - \sqrt{\frac{x-1}{r}}\right) = 1$$

$$(\sqrt{4} - \sqrt{5})^2 = 11 - 2\sqrt{20}, \quad (a + \sqrt{x})(a - \sqrt{x}) = a^2 - x$$

$$(a^r x + a x^r)(a x^r - a^r x) = a^r x^r - a^r x^r$$

$$(d^r - v)(-v + d^r) = d^{2r} - 1 r d^r + r^2, \quad (t_0 + 1)^2 = 1500 + 10 + 1$$

$$[(x-y)-c][(x-y)+c] = (x-y)^2 - c^2 = x^2 + y^2 - c^2 - 2xy$$

$$(m^n - 1)^2 = m^{2n} - 2m^n + 1, \quad (20 - 7)(20 + 7) = 400 - 49$$

$$54^2 = 2500 + 16 + 400, \quad 997 \times 1003 = 1000000 - 9$$

سکه مقدار  $P = (x+y+z+t)^2$  را بدست آورید

حل - واضحست که :

$$P = [(x+y) + (z+t)]^2$$

$$(x+y)^2 + (x+t)^2 + 2(x+y)(x+t)$$

$$P = x^2 + y^2 + x^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yx + 2yt + 2xt$$

سایه سبب کنید  $A = (x+y+z+t)(x+y-z-t)$

حل - باید ملاحظه کرد که :

$$A = [(x+y) + (z+t)][(x+y) - (z+t)]$$

جواب :  $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 + 2xy - 2zt$

سند حساب کنند  $(a+b+c)(a-b+c)$

جواب :  $a^2 + c^2 - b^2 + 2ac$

اینکه مقدار عبارات ذیل را از ردی اتحادهای فوق بدست آورده و صحت نتایج حاصله را بعمل ضرب تحقیق کنید :

جواب

عبارت

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - y^4$$

$$x^2 + 4y^2 + 1 + 2x - 4y - 4xy$$

$$a^2 - (4b - c)^2$$

$$4x^2 + 25 - \frac{24}{x} - 12x + \frac{16}{x^2}$$

$$(x^2 - x + 1)^2$$

$$(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$$

$$(x - 2y + 1)^2$$

$$(a+4b-c)(a-4b+c)$$

$$(2x + \frac{4}{x} - 3)$$



$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 - (c+d)^2 &= (a+b+c+d)(a+b-c-d) \\
 9x^4 + 10x^2y^2 + 16y^4 &= (3x^2+5xy+4y^2)(3x^2-5xy+4y^2) \\
 5x^2 - 11x^2 - 2x &= (5x^2+2x^2-2x)(5x^2-2x^2+2x) \\
 \frac{16y^4}{x^2} - \frac{32y^2}{x} + 22 - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y^2} &= \left(\frac{4y^2}{x} - 2 + \frac{x}{y}\right)^2 \\
 27 + 101x + 90x^2 - 10x^3 - 60x^4 + 41x^5 - 1x^6 &= (3+4x-2x^2)^3
 \end{aligned}$$

مسند - تحقیق کنید که

$$(x^3 - 3x^2 - 2x - 1)^3 =$$

$$x^9 - 9x^7 + 21x^5 + 9x^3 - 27x^2 - 54x^4 - 41x^3 - 21x^2 - 9x - 1$$

مسند عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$(x+y+z)^5 - (x+y-z)^5 - (x-y+z)^5 - (z+y-x)^5$$

$$10xyz(x^2+y^2+z^2) \quad \text{جواب}$$

مسند صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$\begin{aligned}
 &2(x+y+z)^4 + 2(y+z-x)^4 + 2(x+y-z)^4 + 2(z+x-y)^4 \\
 &+ (2x)^4 + (2y)^4 + (2z)^4
 \end{aligned}$$

$$\equiv 2^4(x^4+y^4+z^4)$$

طریق اثبات - باید بت کرد که پس از اجرای اعمال لازمه طرفین صین

یکدیگر میشوند .

مسئله صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \equiv (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$$

(طریق اثبات مانند مسئله فوق میباشد) . این اتحاد به اتحاد لاگرانژ

(Lagrange) مربوط

مسئله صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \equiv$$

$$(ax + by + cz)^2 + (bx - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2$$

مسئله صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$a^3(b-c)^3 + b^3(c-a)^3 + c^3(a-b)^3 - 3abc(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$\equiv 0$$

پسند - صحت اتحاد های ذیل را ثابت کنید

$$[(3+x-2x^2)^2 - (3-x+2x^2)^2][(3+x+2x^2)^2 - (3-x-2x^2)^2]$$

$$\equiv 144x^2(1-4x^2)$$

$$(x - \frac{1}{x})^6 \equiv (x^3 - \frac{1}{x^3})^2 - 6(x - \frac{1}{x})(x^3 - \frac{1}{x^3}) + 9(x - \frac{1}{x})^2$$

$$b(x^2 + a^2) + ax(x^2 - a^2) + a^3(x + a) \equiv$$



$$(a+b)(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

$$(x+y+z)^3 + (x+y-z)^3 + (x-y+z)^3 + (x-y-z)^3 \equiv \\ + x(x^2+3y^2+3z^2)$$

مسند - تحقیق کنید که اگر  $p = a+b+c$  باشد :

$$(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2$$

$$(p-a)^3 + (p-b)^3 + (p-c)^3 + 3abc \equiv p^3$$

$$+ (p-a)(p-b)(p-c) + a(p-b)(p-c) + b(p-c)(p-a) \\ + c(p-a)(p-b) \equiv abc$$

$$(باید ملاحظه کرد که  $p-a = \frac{b+c-a}{2}$ ،  $p = \frac{a+b+c}{2}$  و غیره)$$

مسند - تحقیق کنید که :

$$(a\alpha + c\beta + b\gamma)^3 + (b\alpha + a\beta + c\gamma)^3 + (c\alpha + b\beta + a\gamma)^3 -$$

$$+ (a\alpha + c\beta + b\gamma)(b\alpha + a\beta + c\gamma)(c\alpha + b\beta + a\gamma) \equiv$$

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma)$$

مسند - تحقیق کنید که اگر  $s = a+b+c$  باشد :

$$(s-3a)^3 + (s-3b)^3 + (s-3c)^3 - 3(s-3a)(s-3b)(s-3c) = 0$$

مسئله - مجموع دو عدد ۵ و تفاضلشان فصل مربع بزرگتر بر مجذور کوچکتر خواهد <sup>است</sup>

(جواب ۵) مسئله - مجموع و تفاضل دو عدد و تقریب ۱۸ و ۲ است حاصل ضرب آنها را معلوم کنید

(جواب ۷۷)

مسئله - اگر  $(x+y)^2 = 2500$  و  $xy = 600$  باشد  $x-y$  چقدر است (جواب ۱۰)

مسئله - بنا بر آنکه  $x+y=1$  و  $xy=24$  باشد  $x^3+y^3$  را حساب کنید

طریق حل - باید اتحاد  $(x+y)^3 = (x^3+y^3) + 3xy(x+y)$  را استعمال کرد

(جواب ۲۸۰)

مسئله - مجموع دو عدد ۲۰ و مجموع مکباتشان ۲۸۰ حاصل ضرب آنها را تعیین کنید

(جواب ۲۴)

مسئله - مجموع دو عدد ۱۰ و تفاضلشان ۱۰ است آن دو عدد کدامند

طریق حل - اگر  $x$  و  $y$  اعداد مطلوب باشند بنا بر فرض  $x+y=10$  و  $x-y=10$

حال این دو تساوی را جمع و تفریق میکنیم و ... (جواب ۲ و ۸)

مسئله - ثابت کنید که مجموع هر عدد صحیح و مجذورش بر ۲ قابل قسمت است

برهان - فرض کنیم  $n$  عدد صحیح مفروض باشد و ضحک  $n^2+n=n(n+1)$



طرف ثانی حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است و چون یکی از دو عدد صحیح متوالی بر دو قابل قسمت است  $n(n+1)$  نیز بر دو قابل قسمت خواهد بود. ممکن است با این طریق باشد لال کنیم: و اگر عدد مفروض زوج باشد مجذورش نیز زوج بوده و مجموع دو عدد زوج نیز زوج است ثانیاً اگر عدد مفروض فرد باشد مجذورش نیز فرد بوده و مجموع دو عدد فرد زوج خواهد بود.   
مسئله - ثابت کنید که اگر  $a$  فرد باشد  $a^2+2$  و  $a(a^2+4)$  فرد و  $a^2+1$ ،  $a^2-1$ ،  $a(a^2+3)$  زوج هستند.   
مسئله ثابت کنید که تفاوت دو عدد ۲ باشد تفاضل مجذورات آنها چهار قابل قسمت است.

اثبات - باید ملاحظه کرد که:  $(n+2)^2 - n^2 \equiv 4(1+n)$    
تقسیم و کثیراً بجملة - شریق علی برای تقسیم و کثیراً بجملة از قرار دیت   
۱- مقوم و مقوم علیه را بر حسب قوای صعودی یا نزولی یکی از حروف مشترک مرتب بنویسیم.

۲- جملة اول مقوم را بر جملة اول مقوم علیه تقسیم می نمایم خارج قسمت جملة اول خارج قسمت و کثیراً بجملة است

۲- جمله اول خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را

از مقسوم میکاهیم .

۳- اگر باقیمانده موجود بود آنرا از مقسوم جدیدی طاعتی کرده عمل را

تداوم ده فوق ما دست می دهیم تا وقتی که باقیمانده صفر شود یا درجه اش

بجای حرفی که نسبت بان مرتب شده است از مقسوم علیه نسبت بان

حرف کمتر باشد .

مثال: میخواهیم کثیرا جمله  $x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x - 1$  را بر  $x^2 - x + 1$  تقسیم کنیم

فصل - صورت عمل تفرار ذیل است :

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x - 1 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\
 \underline{x^4 - x^3 + x^2} \phantom{- 5x - 1} \\
 4x^3 \phantom{- 5x - 1} \\
 \underline{4x^3 - 4x^2 + 4x} \phantom{- 1} \\
 8x^2 - 9x - 1 \\
 \underline{8x^2 - 8x + 8} \\
 -5x - 5
 \end{array}$$

توضیح - جمله اول مقسوم  $(x^4)$  را بر جمله اول مقسوم علیه  $(x^2)$  ضرب  
قسمت نمودیم خارج قسمت  $x^2$  شد از آن مقسوم بقیه ضرب کرده حاصل



$(x^4 - x^3 + x^2)$  را از مقوم علیه نقصان نمودیم

۱-  $4x^3 - 5x$  باقیانده این باقیانده را مقوم جدید علامت کرد

جمله اول آن  $4x^2$  را بر جمله اول مقوم علیه تقسیم کردیم خارج قسمت

$4x$  شد آنرا در جل مقوم علیه ضرب کرده حاصل ضرب را از مقوم جدید

کاستیم ۱-  $4x^2 - 9x$  باقیانده بالاخره جمله اول این باقیانده را بر

$4x$  تقسیم نمود و خارج قسمت یعنی ۱ را در  $4x^2 - 9x + 1$  ضرب کرد

حاصل ضرب را از مقوم جدید یعنی ۱-  $4x^2 - 9x$  کم کردیم ۵-  $5x - 5$

باقیمانده

مثلاً خواهیم دید  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  را بر  $x + y + z$  تقسیم کنیم

حل ابتدا دو شیرا بحد را بر حسب قوای نزولی یکی از حروف مثلاً  $x$

رتب میکنیم بدورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3xyz + y^3 + z^3 & x + y + z \\
 x^3 + x^2y + x^2z & \hline
 -x^2y - x^2z - 3xyz + y^3 + z^3 & \\
 -x^2y - x^2z - 3xyz & \\
 \hline
 -x^2z + xy^2 - 2xyz + y^3 + z^3 & \\
 -x^2z - xz^2 - xyz & \\
 \hline
 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 xy^2 - xyz + xz^2 + y^2 + z^2 \\
 \underline{xy^2} \qquad \qquad \qquad + y^2 + y^2 z \\
 -xyz + xz^2 - y^2 z + z^2 \\
 \underline{-xyz - z^2 y - y^2 z} \\
 xz^2 + z^2 y + z^2 \\
 \underline{xz^2 + z^2 y + z^2}
 \end{array}$$

مقدار خارج قسمت بر یک از تقسیم باقی ذیل را بدست آورید

مقدم  
مقدم علییه  
باب

$x - 2a$	$x + 2a$	$x^2 - 5x + 6$
$a + b$	$a + b$	$a^2 + 2ab + b^2$
$x - a$	$x^2 + 5x + 6$	$x^2 - 12x + 36$
$x + 1$	$x + 7$	$x^2 + 10x + 25$
$2x - 3y$	$3x - 2y$	$4x^2 - 12xy + 9y^2$
$x - 1$	$x - 5$	$x^2 - 10x + 25$
$2a - 5$	$3a^2 - 2a - 5$	$4a^2 - 12a + 9$
$2x - 3y$	$2x - 3y$	$4x^2 - 12xy + 9y^2$
$x - 1$	$(x+1)(x-5)$	$x^2 - 5x - x + 5$
$x - 3y$	$x + 3y$	$x^2 - 2xy - 2xy + 9y^2$
$a + 1$	$(a-1)$	$a^2 - 2a + 1$
$2x - 5y$	$2x + 5y$	$4x^2 - 20xy + 25y^2$
$x^2 - x + 1$	$x^2 + x + 1$	$x^2 + x + 1$
$2x - 3y$	$1x - 3y$	$4x^2 - 12xy + 9y^2$
$x^2 + 1$	$(x+1)^2 + 1$	$(x^2 + x + 1)^2 + 1$
$m^2 + mn + n^2$	$m - n$	$m^2 - n^2$
$2x^2 + 9$	$2x^2 - 11x + 11$	$1x^2 + 7x + 9$

پسند - بعد تقسیم ثابت کنند که :



$$\begin{aligned}
m^r - m^r + m - 1 : m^r + 1 &= m - 1 \\
5x^r - rx^0 + rx^r - 1r : rx^r - 1 &= rx^0 + 1r \\
a^r - b^r + rbc - c^r : a + b - c &= a - b + c \\
ra^r - 9a^r + 11a - r : ra - r &= a^r - ra + 1 \\
x^r - x^r + rx - r : x^r + x - r &= x^r - x + r \\
x^r - rx^r + rx - 1 : x^r - rx + 1 &= x^r - 1 \\
a^r + rab + b^r - c^r : a + b - c &= a + b + c \\
x^r - 15y^r : x - ry &= x^r + rx^ry + rx^ry^r + 1y^r \\
11\omega x^r - 9ry^r : \omega x^r - ry &= r\omega x^r + r \cdot x^ry + 15y^r \\
x^r - \omega x + 1\omega : 1 - rx + x^r &= a^r + rx + 1\omega \\
x^r + r : x^r - rx + r &= x^r + rx + r \\
x^r - x^r + rx^r + x + r : x^r - rx + r &= x^r + x + 1 \\
13x + 1 + rx^r + r\omega x^r : \omega x + 1 &= rx^r + 1x + 1 \\
rx^r + ax - 5bx - rab : (rx + a) &= x \cdot r b - \\
1 - rx^0 : 1 - rx &= 1 + rx + rx^r + 1x^r + 15x^r \\
rsx^r + 9 + 10x^r : -rx + r + \omega x^r &= r + rx + \omega x^r \\
15 + r\omega y + r\omega y^r - r9y^r : r + \omega y - ry^r &= r + \omega y + ry^r \\
x^r - y^r + x^r + xy + y^r : x^r + x^ry + y^r &= x - y + 1 \\
rra^0 + b^0 : ra + b &= 15a^r - 1a^rb + ra^rb - rab^r + b^r \\
x^r - 5x + 9 : x^r - rx + r &= x + r \\
rx + rx^ry + y^r - a^r : rx + y - a &= rx + y + a \\
5x^ry - 1rx^ry + 1rx^ry - ry^r : (rx - ry) &= rx^ry - rx^ry + y^r \\
a + 1 - 1\omega b^r + r \cdot ab : a - \omega b + r &= a^r + r\omega b^r + r + 1\omega b - ra + \omega ab \\
rx^0 - r\omega x^r + rx^r - r\omega x^r + 1x : x^r - 1\omega x^r + rx &= rx^r - \omega x + r \\
1 + x + y - xy - x^ry - xy^r : 1 - xy &= 1 + x + y \\
11x^1 - 15y^1 : rx^r - ry^r &= r\omega x^r + 11x^ry^r + 1rx^ry^r + 1y^r \\
x^1y^1 - x^1y^1 : (x - y) &= x^1y^1(x^2 + x^ry + x^ry^r + \dots + y^r) \\
1 + x + x^r + x^r + x^r + x^0 + x^5 + x^r + x^1 + x^9 + x^{10} : 1 - x^0 + x^2 &= \\
1 + x + x^r + x^r + x^r + x^0 + x^5 + x^r + x^1 + x^9 &
\end{aligned}$$

$$\frac{ax - ay - bx + by + cx - cy}{a - b + c} = x - y$$

$$\frac{ra^2b^2 - r^2rc^2}{ra^2b^2 + ra^2b^2c^2 + r^2c^2} = \frac{a^2b^2 + vc^2}{ra^2b^2 + ra^2b^2c^2 + r^2c^2}$$

$$\frac{r^2x^2 + r^2r}{r^2x + r} = \frac{19x^2 - r^2x^2 + r^2x^2 - 5rx + 11}{r^2x + r}$$

$$\frac{x^2 + x^2 + vx^2 - 5x + 11}{x^2 + rx + 1} = x^2 - x + 1$$

$$\frac{x^2 + vx^2 + vx^2 - 1vx - 1r}{x^2 - x - r} = x^2 + x^2 + rx + 1r$$

$$\frac{1.1 - 4y - v1y^2 + r1y^2 - r5y^2}{r^2y^2 + 5 - 1r^2y} = \frac{vy^2 + 2y + r}{r^2y^2 + 5 - 1r^2y}$$

$$\frac{a^2 + ra^2b^2 + b^2}{a^2 + ra^2b^2 + b^2} = \frac{a^2 - ra^2b^2 + ra^2b^2 - ra^2b^2 + 2}{a^2 + ra^2b^2 + b^2}$$

$$\frac{1 - r^2x^2}{1 + 1x^2 + rx + 19x^2 + r^2x^2} = 1 - rx$$

$$\frac{r^2m^2n^2 + 1r^2m^2n^2 + 1r^2m^2n^2 - r^2m^2n^2 - r^2m^2n^2 - r^2m^2n^2 + 1r^2m^2n^2}{r^2m^2n^2 - 1r^2m^2n^2}$$

$$= r^2m^2n^2 + r^2m^2n^2 - \frac{r}{p}m^2n^2 - \frac{1}{q}m^2n^2$$

مطلوبات خارج قسمت بر یک از قسمتها نازل :

مقوم علیه

مقوم

$$a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b$$

$$a^2 + b^2 - rab + 1$$

$$x^m + x^m y^n + y^n$$

$$x^m + x^m y^n + y^n$$

$$a^2 + ra^2 + ra + 1$$

$$a^2 + ra^2 + sa^2 + ta + 1$$



$$ra^r + 1$$

$$ra^r + a - sa^r b - rb$$

$$(y-z)^r + (z-x)^r + (x-y)^r$$

$$rx^r + y^r + rz - rxyx^r$$

$$(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$$

$$x - ry + rz.$$

$$axy - ray^r - ra^r x + ra^r y + rayz - sa^r z$$

جواب ترتیب :  $(x^{r+m} - x^m y^n + y^{r+n}) : (a+b+1)$

و  $(a+1)$  و  $(a-rb)$  و  $(x+y+z)$  و  $(a^r + b^r + c^r)$

$(ay - ra^r)$  و  $+bc + ca + ab$

منه - مطلوبه خارج قسمت  $x^r + qx - 1$  و  $x^r - (q^r + 1)x + q$

جواب  $(x-q)$

منه تحقیق کنید که  $ry^r - y^r + ry - r : (y^r + r) = ry - 1$

$$x^r + rx^r - 1 : (x+1)(x-r)(x+r) = 1$$

منه ثابت کنید که  $\frac{ab(x^r + y^r) + xy(a^r + b^r)}{ax + by} = bx + ay$

$$\{[(x^r - y^r) : (x^r + y^r)] : (x^r + y^r)\} : (x+y) = x-y$$

$$a^r x + abx + ac + ab^r y + b^r y + bc : a+b = ax + by + c$$

$$[a^r - ra^r - a^r + r : (a^r - r)(a^r - ra + r)(a^r + ra + r)] = a^r - 1$$

$$\frac{۱۵x^6 - ۱۰x^5 - ۲۹x^4 + ۲۹x^3 + ۵x^2 - ۱۲x + ۴}{۴x^3 - x^2 - ۳x + ۲} = ۵x^3 - x^2 - ۳x + ۲$$

$$B = a^r + b^r + c^r + d^r - ab - ac - ad - bc - bd - cd + abc +$$

$$+ (a^r + b^r + c^r + d^r - r)(bcd + cda + dab + abc) \text{ باشد}$$

$\frac{A}{B}$ ، احساب کنید

$$(a+b+c+d \text{ جواب})$$

مسئله - تحقیق کنید که :

$$\frac{r_{n+2}x^{n+2} - 11x^{n+1} + 10x^n - 15x^{n-1} + 1x^{n-2} - x^{n-3}}{x^{n+1} - 3x^n + 2x^{n-1} - x^{n-2}} = 1x - 5x + 2$$

اتحاداتی دلیرا باید همیشه در خاطر داشت :

$$\frac{a^r - b^r}{a + b} \equiv a - b$$

$$\frac{a^r - b^r}{a - b} \equiv a + b$$

$$\frac{a^r + b^r}{a + b} \equiv a^r - ab + b^r$$

$$\frac{a^r - b^r}{a - b} \equiv a^r + ab + b^r$$

این چهار اتحاد چسبن بیان می شوند :

۱- خارج قسمت تفاضل مربع دو مقدار بر مجموع (تفاضل) آن دو

مقدار مساویست با تفاضل (مجموع) آنها



۲- مجموع کسوفات دو مقدار بر مجموع آنها قابل قیمت است و خارج قیمت مساوی است

با فضل مجموع مربعین آنند و بر حاصل ضربشان

۳- تفاضل کسوفات دو مقدار بر تفاضل آنها قابل قیمت است و خارج

قیمت مساوی است با مجموع مربعین آنند و بعلاوه حاصل ضرب آنها

سند خارج قیمت تقسیم بای دیگر بدون برای عمل تقسیم بدست آورید

جواب	مقسوم علیه	مقسوم
$5-4$	$x-1$	$5^2-4^2$
$x+1$	$x-1$	$x^2-1$
$x-3$	$x+3$	$x^2-9$
$2x+3y$	$2x-3y$	$4x^2-9y^2$
$x^2+y^2$	$-x^2+y^2$	$x^4-y^4$
$x^2-y^2$	$x^2+y^2$	$x^4-y^4$
$x^2-1$	$1+x^2$	$x^4-1$
$x-1$	$x+1$	$x^2-1$
$100+10$	$100-10$	$10000-100$
$2ab+acd$	$2ab-acd$	$4a^2b^2-ac^2d^2$
$x^2+x+1$	$x-1$	$x^3-1$
$a+b-x+y$	$(a+b)+(x-y)$	$(a+b)^2-(x-y)^2$
$a^2+2a+9$	$a+3$	$a^3+27$
$a+b+c-1$	$a+b+c+1$	$(a+b+c)^2-1$
$a^2+2a+4$	$a-2$	$a^3-1$
$a^3+3ab^2+9b^3$	$a-3b$	$a^3-27b^3$
$100+100+94$	$100-100$	$10000-10000$
$b^2x^2+abx+10$	$b^2x^2-a$	$b^2x^4-100$

$3x-y$	$x+7y$	$(3x+7y)^2 - (x-7y)^2$
$a^{2m}+b^n$	$a^{2m}-b^n$	$a^{4m}-b^{2n}$
$a^2-b^2$	$a^2+a^2b^2+b^2$	$a^2-b^2$
$a^{2m}+a^mb^n+b^{2m}$	$a^m-b^n$	$a^{2m}-b^{2m}$
$1+x^2$	$5x-1x^3+x^5$	$51x+x^9$
$\sqrt{x}+\sqrt{x}+1$	$\sqrt{x}-1$	$x-1$
$x-4$	$x^2+4x+16$	$x^2-4x$
$(a+b)^2-c(a+b)+c^2$	$a+b+c$	$(a+b)^2+c^2$
$4a^2b^2+10abxy+25x^2y^2$	$2a^2b+5xy$	$10a^2b^2+100x^2y^2$
$a+2b-2c$	$a+2b+2c$	$(a+b)^2-9c^2$
$1+4c^2+16c^4$	$1-4c^2$	$1-64c^6$

سر مطلوب است خارج قسمت تقسیم  $x^{12}-1$  بر  $x^4-1$

حل - فرض کنیم  $x^4=2$  نتیجه میشود :

$$\frac{x^{12}-1}{x^4-1} = \frac{x^8-1}{x-1} = x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

حال اگر بجای 2 در کشیر بجای  $x^4$  قرار دهیم حاصل میشود

$$\frac{x^{12}-1}{x^4-1} = x^8+x^4+1$$

مسئله - محمد ۵ نفر عمده که در روز ۴ ساعت کار میکنند حوضی

بشکل مکتب استیل را که ابعادش ۴ در ۵ است در ۲ روز  
حفر کرده اند معلوم کنید در نفر عمده که در روز ۴ ساعت کار میکند در چند

حوضی که ابعادش ۵ در ۴ و ۴ با حفر می کنند (جواب ۲)



مسئله - بنحوا سیم خارج قسمت تقسیم  $x^6 + x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 1$   
 بر  $x^4 - x^3 + x^2 - x + 5$  جمله بدست آوریم  
 حل - صورت عمل از ابتدا راست :

$$\begin{array}{r|l}
 x^6 + x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 1 & x^4 - x^3 + x^2 \\
 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 1 & x^2 + 2x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \\
 \hline
 -x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4x - 1 & \\
 2x^3 - 4x^2 + 4x - 1 & \\
 -x^2 + x - 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

توضیح - بعد از اینکه باقیمانده  $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$  رسیدیم  
 عمل تقسیم را بتقواعد سابق امتداد دادیم خارج قسمت جمله اول این  
 کثیرالجزء  $3x^3$  عبارت است از  $\frac{3}{x}$  :  $x^4 = 3x^3$  این قسمت را  
 در مقوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از  $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

کلمه کردیم و قس علیهذا الی آخره

مسئله - جمله خارج قسمت تقسیم  $1 - x$  بر  $1 + x$  بدست آورید  
 حل - صورت عمل از ابتدا راست

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 x \\
 x^2 \\
 x^3 \\
 x^4 \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1-x \\
 \hline
 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots
 \end{array}$$

پس آنکه دیده شود جمله اول خارج قسمت  $x^n = 1$  و جمله دوم آن  $x$  در جمله  
 سوم آن  $x^2$  است و پس علیهذا الی آخر تقسیمی که جمله  $n$  ام خارج قسمت  $x^{n-1}$   
 خواهد بود و بنا بر این اگر جمله خارج قسمت را برابر  $R$  بنماییم :

$$R = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

اگر ملاحظه کنیم که باقیمانده که پس از تقسیم  $x^{n-1}$  بدست میاید  $x^n$  است  
 این اتحاد قیحه میشود

$$1 \equiv (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) + x^n$$

ازیرا مقوم مساوی است با حاصل ضرب مقوم علیه خارج قسمت

بعلاوه باقیمانده

سده صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$(1-x+rx^2) \equiv (1-x-x^2)(1+rx^2) + rx^3(x+1)$$



طریق اول - کافی است افعال لازم را در طرف ثانی بجری داشته و خط  
کنیم که حاصل عین طرف اول است .

طریق دوم - خارج قسمت  $x^2 + x - 1$  بر  $1 - x - x^2$  تا دو جمله

حساب میکنیم تا نیصورت :

$$\begin{array}{r} 1 - x + 2x^2 \\ 3x^2 \end{array} \bigg| \frac{1 - x - x^2}{1 + 3x^2}$$

$$3x^3 + 3x^2 = 3x^2(x+1) \quad \text{بنابراین}$$

$$1 - x + 2x^2 \equiv (1 - x - x^2)(1 + 3x^2) + 3x^2(x+1)$$

۲۴ سند - تحقق کنید که :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \dots$$

$$\frac{1+x}{1-2x} = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

$$\frac{1+3x}{1-2x} = 1 + 5x + 10x^2 + 15x^3 + \dots$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^r} = 1 + rx + rx^2 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^r} = 1 + rx + rx^2 + rx^3 + \dots$$

$$\frac{1+x}{1+rx} = 1 - rx + rx^2 - \dots$$

$$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \dots$$

$$\frac{x}{x^r-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^{2r}} + \frac{1}{x^{3r}} + \dots$$

$$\frac{a^y}{b^y-1} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b^ry} + \frac{a}{b^{2ry}} + \dots$$

$$\frac{1+rx}{x-rx^r} = x^{-1} + 1 + rx + rx^2 + \dots$$

$$\frac{1}{(a+b)^r} = \frac{1}{a^r} - \frac{rb}{a^r} + \frac{r^2b^2}{a^r} - \frac{r^3b^3}{a^r} + \dots$$

$$(1+x)^{-r} = 1 - rx + rx^2 - rx^3 + \dots$$

$$\frac{1+rx}{1-x^r} = 1 + rx + x^r + rx^r + \dots$$

$$\frac{rx}{x^r+1} = r(x - x^r + x^{2r} - \dots)$$

$$\frac{x^r}{x^r-1} = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^{2r}} + \dots$$

$$\frac{rx+1}{x^r+x+1} = 1+x - rx^r + \dots$$

$$\frac{rx^r+x}{x^r-1} = \frac{r}{x} + \frac{r}{x^r} + \dots$$

$$\frac{x^r+rx-1}{x^r-x^r+1} = \frac{1}{x} + \frac{r}{x^r} + \dots$$



$$\frac{2+3x}{1+x+x^2} = 2+x-3x^2+2x^3+x^4-\dots$$

$$\frac{1-2x+2x^2}{1+3x-4x^2} = 1-5x+11x^2-13x^3+33x^4-\dots$$

مذ.  $x^n - y^n$  را بر  $x - y$  تقسیم کنید

غل. صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{r} x^n - y^n \\ x^n - x^{n-1}y \\ \hline x^{n-1}y - y^n \\ x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 \\ \hline x^{n-2}y^2 - y^n \\ x^{n-2}y^2 - x^{n-3}y^3 \\ \hline x^{n-3}y^3 - y^n \\ x^{n-3}y^3 - x^{n-4}y^4 \\ \hline x^{n-4}y^4 - y^n \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

چنانکه دیده میشود اولاً مجموع نماینده  $x$  و  $y$  در جمله اول برقیانده

و در است ثانیاً نماینده  $y$  در هر باقیانده معادل مرتبه آن باقیانده

میباشد مثلاً نماینده  $y$  در باقیانده دوم  $(x^{n-2}y^2)$

و در باقیانده سوم  $(x^{n-3}y^3)$  همیشه

از این معلوم میشود که جمله اول باقیانده  $n-1$  م عبارتست از:

$$x \cdot y^{n-1} \text{ و نیز برای } n:$$

$$xy^{n-1} - y^n = \text{باقیمانده } n-1 \text{ م حال عمل تقسیم}$$

است داد می‌دهیم با این صورت:

$$\begin{array}{r|l} x^n - y^n & x - y \\ \hline x^n - x^{n-1}y & x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1} \end{array}$$

$$\dots$$

$$\begin{array}{r} xy^{n-1} - y^n \\ \hline xy^{n-1} - y^n \end{array}$$

چنانکه دیده میشود خارج قیمت نماینده  $y$  از صفر شده و عبارت می‌نماید

و به  $n-1$  ختم شده است بنا بر این خارج قیمت  $n$  جمله دارد

از اینجا دو اتحاد ذیل بدست می‌آید:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

$$\text{مثلاً } \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + y^2$$



$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

(تعلیم باید اتحادی فوق را همیشه در نظر داشت باشد.)

۳۲- از بسند فوق قضیه ذیل نتیجه شود :

قضیه  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$  قابل قسمت است

پس صحت اتحادی فوق را به هر طریق ثابت کنید (طریق اول تقسیم  
طریق دوم استنتاج اتحادی فوق)

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$\frac{x^6 - y^6}{x - y} = x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$$

سند ثابت کنید که :

$$(x^n - 1) : (x - 1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$$

پس ذکر کنید نتیجه مهم

اولاً فرض کنیم  $n$  فرد باشد. اگر در اتحاد

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}$$

$y$  را به  $-y$  تبدیل کنیم حاصل میشود :

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}$$

(فقط علامت جمله نمايند  $y$  در آنها منفرجه باشد تغيير ميكنند) يعني وقتي

$n$  فرد باشد  $x^n + y^n$  بر  $x + y$  قابل قسمت است مثلاً:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$$

تا نياز فرض كنيم  $n$  زوج باشد چون در همان احوال  $y$  را به  $-y$  تبديل كنيم حاصل ميشود:

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - y^{n-1}$$

يعني وقتي  $n$  زوج باشد  $x^n - y^n$  بر  $x + y$  قابل قسمت است مثلاً:

$$\frac{x^6 - y^6}{x + y} = x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$$

۳۴ يعبر نصف - كثير البكره نسبت يكلي از عروض صحيح خوانند وقتي منها

شكل آن نسبت آن حرف صحيح و منطبق باشند مثلاً كثير البكره با

$$ax^n - nx^{n-1} + \dots - x + 1$$

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l$$





$$f(y) = 5y^5 - 3y^4 + y - 1$$

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l$$

مقدار عددی  $f(x)$  را باز از  $x = d$  می‌نمایم:

مسئله بنابر آنکه  $f(x) = x^2 - x + 1$  باشد  $f(0)$ ،  $f(1)$ ،  $f(\frac{1}{4})$  را حساب کنید

حل - موافق قرار داد فوق متصور داریم  $f(0)$  مقدار عددی  $x^2 - x + 1$

است باز  $x = 0$  بنا بر این  $f(0) = 0^2 - 0 + 1 = 1$  و نیز

$$f(1) = 1 - 1 + 1 = 1 \quad , \quad f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{13}{16}$$

مسئله بنابر آنکه  $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$  باشد  $f(0)$ ،  $f(2)$

را حساب کنید (جواب ۳۰- و ۰)

مسئله بنابر آنکه  $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$  باشد تحقیق کنید که

$$f(1) > f(-3), \dots, f(-1) = f(4), f(5) = f(0)$$

مسئله بنابر آنکه  $f(x) = \frac{2x-3}{x+7}$  باشد  $f(\sqrt{2})$  چقدر است

(جواب ۰.۲۰۴-)

مسئله بنابر آنکه  $f(y) = a^3 - ax^2 + ax^2 + a$  باشد  $f(a)$  را حساب کنید

$$f(a) = a^3 - a \cdot a^2 + a^2 \cdot a = a^3 \quad \text{حل -}$$



مسئله بزرگتر:  $f(x) = x^3 + x + 1$  با  $f(x-2)$  و  $f(a)$  تقسین  
کنید (جواب  $x^3 - 6x^2 + 13x - 9$  و  $a^3 + a + 1$ )

مسئله تحقیق کنید که  $f(x) = x^{2m} + x^{2n} + 1$  باشد  $f(1) = 2$  و  $f(0) = 1$

$$f(-a) = f(a)$$

مسئله کوچکتر:  $f(x) = x(x-1)(x-\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$  منفرض است تحقیق کنید

$$0 = f(0) = f(1) = f(\frac{1}{x}) = f(-\frac{1}{x})$$

$$f(\frac{1}{a}) = \frac{2}{a^2}(\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{a} - \frac{1}{x})$$

تقسیمیه - باقیانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-a$

عبارت از  $f(a)$

قبل از اثبات این قضیه تحت آنرا بوسیله چند مثال توضیح میدهم

مثال ۱ - بوسیله تقسیم معلوم شود که باقیانده تقسیم  $x^3 - x - 3$  بر  $x-2$

$$\text{بر } x-2 \text{ مساوی ۳ است خلاصه: } f(2) = 2^3 + 2 - 3 = 3$$

مثال ۲ - باقیانده تقسیم  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$  بر  $x-1$

$$\text{منفرجه خلاصه: } f(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

مثال ۳ - باقیانده تقسیم  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 1$  بر  $x + \frac{1}{x}$

میباشند،  $1 = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} = f(1 - \frac{1}{n})$   
 برهان - فرض کنیم  $Q$  خارج قسمت  $R$  باقیانده تقسیم  $f(x)$   
 باشد بر  $x - a$ ، چون مقوم علیه نسبت به  $x$  از درجه اول است  
 $R$  شامل  $x$  نخواهد بود. خلاصه

$$f(x) \equiv (x-a)Q + R$$

بنابر تعریف اتحاد باید طرفین این رابطه بازنه با جمع متعادیر بر  $x$  محقق باشد  
 فرض کنیم  $x = a$  نتیجه میشود

$$f(a) \equiv (a-a)Q + R$$

(چون  $R$  شامل  $x$  نبوده تغییر نمیکند) یا :

$$f(a) = R$$

وقتی  $f(x) = x - a$  قابل قسمت باشد باقیانده تقسیم صفر است

یعنی  $f(a) = 0$  و از اینجا فنتیه ذیل نتیجه میشود :

۳۷- قضیه - اگر  $f(a) = 0$  باشد، آنگاه  $f(x)$  بر  $x - a$  قابل قسمت باشد

$$f(a) = 0 \text{ است}$$

بالعکس اگر  $f(a) = 0$  باشد  $f(x)$  بر  $x - a$  قابل قسمت است



اثبات - برای اثبات کافی است برین کنیم که باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-a$  صفر است. خلاصه فرض کنیم  $Q$  خارج قسمت و  $R$  باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-a$  باشد پس:

$$f(x) = (x-a)Q + R$$

حال اگر در طرفین این اتحاد بجای  $x$  قرار داده و ملاحظه کنیم که  $f(a) = 0$  نتیجه میشود  $R=0$ .

مثال - اگر  $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$  باشد  $f(1) = 0$  است پس  $f(x)$  قابل قسمت است بر  $x-1$ .

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - x - 1 \quad | \quad \frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} \\ \underline{2x^2 - x - 1} \\ x - 1 \end{array}$$

امتحان:

مثال ۲ - اگر  $f(x) = x^n - y^n$  باشد  $f(y) = 0$  است پس  $x^n - y^n$  بر  $x-y$  قابل قسمت است و این مطلب را میبایست بدانیم.

مثال ۳ - فرض کنیم  $f(t) = t^2 + 2t + 1$  و ضمت که  $f(-1) = 0$  است پس  $f(t)$  بر  $t+1$  قابل قسمت میباشد.

مثال ۴ - باقیمانده تقسیم  $f(x) = x^n + y^n$  بر  $x-a$

بجاست از :  $f(-y) = (-y)^n + y^n$

از آنجمله و وضحت که اگر  $n$  زوج باشد  $f(-y) = y^n$  میشود و اگر  $n$  فرد

باشد حاصل میشود  $f(-y) = 0$  یعنی در این حالت  $f(x)$  بر

$x+y$  قابل قسمت است و این مطلب سابقاً هم مذکور شد.

باقیمانده هر یک از تقسیم های ذیل را بدون اجرای عمل تقسیم تعیین کنید

جواب باقیمانده	مقوم علیه	مقوم
0	$x-1$	$x^3 - 2x + 1$
45	$x-2$	$3x^3 - 4x^2 - 23x + 9$
3	$x-2$	$x^3 - x^2 + 1$
23	$x+2$	$x^4 - 2x^3 + x - 7$
6	$x-1$	$x^5 - 3x^3 + x^2 + 7$
62	$x+2$	$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 6$
0	$x-a$	$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$
1946	$x-3$	$x^5 - 9x^3 + 2x - 4$
$-6b^2$	$a-b$	$a^5 - 5b^2(a+b) - b^5$
0	$x+5$	$x^3 + 3x^2 - 13x - 15$
$a^4 + a^2 - 2a$	$x-a^2$	$x^4 - 2a^2x^2 + a^4$
73	$x-5$	$2x^4 - 45x^3 - 9x - 7$
0	$x + \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$	$ax^2 + 2bxc + c$
0	$a-b$	$bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$
0	$x-1$	$x^4 - 1$
-14	$x-4$	$x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2$
0	$a+(b-c)$	$a^3 + b^3 + c^3 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 - a^2b - ab^2$
0	$x+(y+z)$	$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$



۳۸- ممکن باید قضایای ذیل را در خاطر داشته باشید :

۱- اگر  $f(x)$  به  $(x-a)^n$  و  $(x-b)^l$  و  $(x-c)^m$  ... و غیره

قابل قسمت باشد حاصل ضرب آنها نیز قابل قسمت است .

۲- اگر عبارتی که نسبت به یک حرف از درجه  $m$  است بازایش

آن  $m$  مقدار آن حرف صفر شود متحد با صفر است

۳- وقتی دو کثیرالجه که نسبت به یک حرف مرتب شده اند متحد باشند ضرب

قوای مساوی آن حرف دو کثیرالجه مساوی است یعنی اگر :

$$(1) ax^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = bx^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

باشد :  $a = b$  و  $a_1 = b_1$  و  $a_n = b_n$  و ...

زیرا چون در طرفین اتحاد فوق بجای  $x$  صفر قرار دهیم نتیجه می شود  $a_n = b_n$

پس اتحاد (۱) با اینصورت بیرون میآید

$$ax^n + \dots + a_{n-1}x + a_n = bx^n + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

حال اگر از طرفین  $a_n$  را نقصان نمود و طرفین تساوی حاصل را به  $x$  تقسیم

کنیم اتحاد ذیل نتیجه میشود :

$$ax^{n-1} + \dots + a_{n-1} = bx^{n-1} + \dots + b_{n-1}$$

که چون در طرفینش بجای  $x$  منفرد قرار دهیم حاصل میشود  $\frac{2}{n-1} = \frac{2}{n-1}$

و پس علیهذا برای اثبات تساوی سایر ضرایب

ساده مقدار  $\alpha$  را بقسیمی تعیین کنید که  $2x^2 - 5x + 2 \equiv \alpha(x-2)(x-\frac{1}{2})$

حل - حال لازم در طرف ثانی را بجا میآوریم حاصل میشود  $2x^2 - 5x + 2$

$$\equiv \alpha x^2 - \frac{5\alpha}{2}x + 2\alpha$$

خلاصه چون این دو عبارت متحدند بنا براین

فوق باید ضرب  $x$  در طرف اول مساوی ضرب  $x^2$  در طرف ثانی

باشد یعنی  $\alpha = 2$

مطلوب است خارج قسمت و باقیانده تقسیم کثیرا بجز  $x^4 + 2x^2 - 7x + 1$

بر  $x^2 - 1$  بدون جبرای عمل تقسیم

حل - چون مقسوم علیه از درجه دوم است خارج قسمت نیز از درجه دوم

و باقیمانده از درجه اول خواهد بود پس فرض کنیم  $ax^2 + bx + c$  خارج

قسمت  $dx + e$  باقیانده باشد. مقصود تعیین  $a, b, c, d, e$  است

بدون اجرای عمل تقسیم برای اینکار بطریق ذیل عمل میکنیم و افحمت که

$$x^4 + 2x^2 - 7x + 1 \equiv (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c) + dx + e$$

یا پس از مرتب کردن طرف ثانی بحسب قوای نزولی  $x$ :



$$x^4 + 2x^3 - 7x + 1 \equiv ax^3 + bx^2 + (c-a)x + dx + (c-c)$$

برای اینکه این اتحاد برقرار باشد باید  $a=1$ ،  $b=0$  و  $c-a=2$ ،  $c-a=2$

$d=-7$  و  $c=1$  باشد. فلانجه  $c-a=c-1=2$  پس  $c=3$  و چون

$c-3=1$  است پس  $c=4$  می باشد. پس بیرون قسمت مطلوب

$x^3 + 2x^2 - 7x + 4$  باقیمانده است.

مسئله مطلوب است خارج قسمت و باقیمانده تقسیم  $x^5 - 1$  بر  $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$  بدین

اجرای عمل تقسیم

حل - مقسوم علیه کثیرالجهت است که بحسب  $x$  از درجه سوم می باشد

و باقیمانده بحسب  $x$  از درجه اول است پس فرض کنیم  $ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx + c$  خارج قسمت و  $ex + f$  باقیمانده مطلوب باشد باید:

$$x^5 - 1 \equiv (x^3 + 2x^2 - 7x + 4)(ax^2 + bx + c) + ex + f$$

$$x^5 - 1 \equiv acx^5 + x^4(2a+b) + x^3(2b+c-a) +$$

$$+ x^2(2c+d-b) + x(2d+e-c) + f-d$$

برای استقرار این اتحاد باید  $a=1$  و  $2a+b=0$  و  $2b+c-a=0$

و  $2c+d-b=0$  و  $2d+e-c=0$  و  $f-d=-1$  باشد. حالا

چون  $2a+b=2+b=0$  است پس  $b=-2$  و چون  $2b+c-a=-4+c-1$  است پس  $c=5$  است بنابراین  $c=5$  از وقت تساوی چهارم چنین شود

$10+d+2=0$ ،  $12+d=0$  پس  $d=-12$  و بعد تساوی پنجم با این صورت

بسیار دور می آید:  $-24+e-5=e-29=0$  پس  $e=29$  و بالاخره

از تساوی ششم نتیجه می شود  $f-29=-1$  یا پس از جمع  $29$  با طرفین  $f=28$

بقیسی که خارج قسمت مطلوب  $x^3-2x^2+5x-12$  و تقانده  $29x+21$  است

مسند  $a, b, c, d, m, n$  را بقیسی تقسیم کنید که:

$$x^5+x^4-x^3-12x+5 \equiv (x^2+2x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)+mx+n$$

(جواب:  $m=n=0, a=1, b=-1, c=2, d=-5$ )

مسند  $A, B, C$  را بقیسی تعیین کنید که:

$$12-x \equiv 12A-x(7A+4B+3C)+x^2(A+B+C)$$

جواب  $A=1, B=3, C=2$

مسند  $a, b, c, d$  را بقیسی معلوم کنید که اتحاد ذیل منفر شود

$$6x^3+27x^2+47x+14 \equiv a(x+2)^3+b(x-2)(x+2)^2+c(x+2)(x-2)+d(x-2)$$



جواب  $a=4, b=2, c=-1, d=3$  شد.

مسئله - فرض کنیم کثیر الجمله  $ax^2+bx+c$  بر  $x-\alpha$  و  $x-\beta$  قابل قسمت باشد  
 اولاً عامل  $K$  را تقسیمی تعیین کنید که  $ax^2+bx+c \equiv K(x-\alpha)(x-\beta)$

ثانیاً  $\alpha+\beta$  و  $\alpha\beta$  را محاسبه و  $a$  و  $b$  و  $c$  حساب کنید.

حل - چون طرف ثانی احتیاجاً فوق‌العاده ای از توان  $x$  مرتب کنیم

$$ax^2+bx+c \equiv Kx^2 - Kx(\alpha+\beta) + K\alpha\beta$$

برای استمرار این اتحاد باید  $K=a$  و  $-K(\alpha+\beta)=b$  و  $K\alpha\beta=c$  باشد.

با ملاحظه  $K=a$  از دو رابطه دیگر نتیجه می‌شود  $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$  و  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

مسئله - فرض کنیم کثیر الجمله  $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$  بر  $(x-\alpha)$

$(x-\beta)$  و  $(x-\gamma)$  و  $(x-\delta)$  قابل قسمت باشد اولاً  $K$  را تقسیمی تعیین کنید که

$$\equiv K(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

ثانیاً مجموع  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  را حساب کنید.

ثالثاً حاصل ضرب آنها را بدست آورید راجعاً مجموع حاصل ضربهای دومی  
 آنها را تعیین کنید  $(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$  حاصل ضربها

به سه آنها را معلوم نمایند  $(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$

جواب  $a=k$  مجموع  $-\frac{b}{a}$  - مجموع حاصل ضربها و  $\frac{c}{a}$  و مجموع

حاصل ضربهای سه به سه  $-\frac{a}{a}$  - حاصل ضرب  $\frac{c}{a}$

مسئله -  $a$  و  $b$  را تعیین کنید که  $an^2 + bn$  مجموع عدد

طبیعی از یک تا  $n$  باشد.

طریق حل - باید  $an^2 + bn = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

و نیز  $a(n+1)^2 + b(n+1) = (1 + 2 + \dots + n + (n+1))$  حال اگر طرفین را

اول را از طرفین تساوی دوم نقصان کنیم حاصل شود  $2an + (a+b)$

$\equiv n+1$  اتمام برتعم است (جواب  $a=\frac{1}{2}$  و  $b=\frac{1}{2}$ )

مسئله  $a, b, c$  را تعیین کنید که  $an^3 + bn^2 + cn$  مجموع مجزورات

$n$  عدد طبیعی باشد.

بهولت معلوم میشود که:  $a=\frac{1}{6}$  و  $b=\frac{1}{2}$  و  $c=\frac{1}{3}$  پس:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

و چون ملاحظه کنیم که  $2n^2 + 3n + 1 \equiv (2n+1)(n+1)$  نتیجه میشود:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مثلاً اگر  $n=5$  باشد نتیجه میشود:



$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ = \frac{۵ \times ۶ \times ۱۱}{۶} = ۵۵$$

مَسَد فرض کنیم رشته اعداد ذیل را :

$$a, b = a + r, c = a + ۲r, d = a + ۳r, \dots$$

چنانکه دیده میشود هر جمله این رشته مساویست با جمله اول بعلاوه حاصلضرب

مرتبه جمله با قبل آن در عدد  $r$  پس اگر جمله  $n$ ام این رشته را  $l$  بنامیم:

$$l = a + (n-1)r \quad \text{حال میخواهیم اعداد } x \text{ و } y \text{ را تقسیمی تعیین کنیم که:}$$

$$a + b + c + \dots + l = xn^۲ + yn$$

فرا معلوم شود که:  $x = \frac{r}{۲}$  و  $y = \frac{۲a-r}{۲}$  بنا بر این :

$$a + b + c + \dots + l = \frac{1}{۲}n^۲ + \frac{۲an-rn}{۲} = \frac{n(۲a+1n-1)}{۲} \\ = \frac{n(a+l)}{۲}$$

مَسَد حساب کنید مجموع ۵۰ جمله این رشته را:  $۷, ۹, ۱۱, \dots$

حل - در این رشته  $a=۷, r=۲, n=۵۰$  پس

$$۷ + ۹ + \dots = \frac{۵۰(۲ \times ۷ + ۲ \times ۵۰ - ۲)}{۲} = ۲۸۰۰$$

۳۹- تعریف - تصاعد عددی رشته‌ایست از اعداد تقسیمی که هر جمله

آن مساوی جمله با قبلش باشد بعلاوه مقدار ثابتی که بقدر نسبت مستقیم

مثلاً رشته مسدود قبیل تصاعد عددی است. عدد  $a$  را جمله اول تصاعد

عددی خوانند

فرض کنیم در دنباله نسبت  $n$  عدد اول و  $l$  جمله آخر و در مجموع  
 $n$  جمله اول تصاعد عددی باشد. دستورات اصلی تصاعد عددی  
 از آنفیه دارند :

$$l = a + (n-1)r \quad S_1 = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n(r a + r n - r)}{2}$$

مسدود حساب کنید  $S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$  را

طریق حل - باید ملاحظه کرد  $S = (1+2+3+4+\dots+n) +$

$$S = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \quad \text{جواب} \quad (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

مسدود ثابت کنید که :

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 2n = n(n+1)$$

مسدود مطلوب است مجموع جمله رشته  $2x+3y, 3x+2y, 4x+y, \dots$

(جواب ۳۵۰)

۴۰. (مقادیر موهومی)

سابقاً گفتیم که مقادیر منفی ریشه زوج ندارند پس اگر  $a$  منفی باشد برای



$\sqrt{a}$  مقداری موجود نیست و نیز نمیتوان مقداری برای  $a = -۱$

و  $a = ۵$  و غیره بدست آورد. چنین مقادیر را (موهومی) خوانند

نماتاً گفتیم که:  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$  یا  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$  بقسمی که:

$$\sqrt{-۱} = i, \sqrt{-۴} = ۲i, \sqrt{-۹} = ۳i, \dots$$

بطور کلی اگر  $\sqrt{-۱}$  را به  $i$  بنمایم میتوان نوشت

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$$

مثلاً تحقیق کنید که

$$\sqrt{-۱۶} = ۴i, \sqrt{-۱۲۱} = ۱۱i, \sqrt{-a^{2m}} = a^m i$$

$$i^۲ = -۱, i^۳ = -i, i^۴ = ۱, i^۵ = i, \dots$$

$$(i^m = i^{m-4n})$$

$$i^{۱۰۰۲} = ۱, i^{۱۰۰۳} = i, i^{۱۰۰۴} = -۱, i^{۱۰۰۵} = -i, \dots$$

(تشریح داد)

۱- عبارت  $ax^۲ + bx + c$  مجموع حاصل ضربهای دو بدوی سه مقدار  $x, y, z$  است هیچ اقسام ممکنه.

۲- عبارت  $ax^۲ + bx + c$  مجموع مجزورات سه مقدار  $a, b, c$  است

جبارت اول مجموع یک عدد جملی است شبیه به  $xy$  و عدد آنها مربوط به  
 عدد مقادیری است که حاصل ضرب دو بدوی آنها حساب میشود. جبارت  
 دوم نیز مجموع یک عدد جملی است شبیه به  $a^2$  و عدد آنها مربوط است  
 بعد و عواملی که مجموع مجذور ایشان مطلوب است پس میتوان گفت :

اولاً  $xy + yz + zx$  مجموع جملی است شبیه به  $xy$  و بعبارة آخری  
 مجموع اقسام  $xy$  است ثانیاً  $a^2 + b^2 + c^2$  مجموع جملی است شبیه به  
 و بعبارة آخری مجموع اقسام  $a^2$  است اگر بجای لفظ مجموع اقسام  
 حرف  $\Sigma$  (سگما) را قرار دهیم میتوان نوشت :

$$xy + xz + xz = \Sigma xy \quad a^2 + b^2 + c^2 = \Sigma a^2$$

و نیز :

$$a + b + c + d + \dots + l = \Sigma a$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \dots + \sqrt{v} = \Sigma \sqrt{x}$$

$$a^2b + a^2c + c^2a + c^2b + b^2a + b^2c = \Sigma a^2b$$

«حاصل ضرب مجذور هر یک از سه مقدار  $a$  و  $b$  و  $c$  در هر یک از دو

دیگر»



نُسخه - تعلیم باید همیشه اتحادی ذیل را در خاطر داشته باشند

$$(۱) \quad (a \pm b)^r \equiv a^r \pm r a^{r-1} b + b^r$$

$$(۲) \quad (a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(۳) \quad (a+b)^r - (a-b)^r \equiv r a b$$

$$(۴) \quad (a \pm b)^r \equiv a^r \pm r a^{r-1} b + r a^{r-2} b^2 \pm b^r$$

$$(۵) \quad (a \pm b)^r \equiv a^r \pm b^r + r a b (a \pm b)$$

$$(۶) \quad (a+b+c+\dots+l)^r \equiv \sum a^r + r \sum a b$$

$$(۷) \quad (a+b+c)^r \equiv \sum a^r + r \sum a^r b + r a b c$$

$$(۸) \quad (a+b+c)^r \equiv \sum a^r + r(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(۹) \quad x^n - a^n \equiv (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2} a + \dots + a^{n-1})$$

## ( سومین سلسله تفریحی )

مقدمه — عددی تعیین کنید که رقم آحادش  $x$  و رقم عشرانش  $y$  و رقم یاتش  $z$  و رقم الوش  $t$  ..... و غیره باشد.

برای تعیین عدد مطلوب کافی است عدد واحد یا یز که شامل است

تعیین کنیم پس اگر  $N$  عدد مطلوب باشد:  $N = \dots 1000t + 100z + 10y + x$

مثلاً عدد پنج رتبی که رقم آحادش ۲ و چهار رقم دیگرش ترتیب

۷ و ۸ و ۵ و ۶ با عبارت از  $6 \times 10000 + 8 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 2$

بعد از این مقدمه گوئیم شخصی امر کند چند عدد کوچکتر از ده خیال

کند و اولی را در ده ضرب نموده بجای حاصل ۵ واحد بیفزاید و مجموع

در ده ضرب کند و بجای حاصل ضرب ده واحد اضافه نماید و نتیجه را با

عدد دوم جمع کنند و مجموع را در ده ضرب نموده بجای حاصل ضرب عدد

چهارم را بیفزاید و قس علیهذا الی آخر حاصل را سوال کنید و از آن

عدد دیگر که عدد ارتقامش مساوی عدد اعدادی که خیال کرده است

و در رقم اول سمت رتیش ۳۵ و بقیه ارتقامش صفر است نقصان کن

ارتقام تفاصل ترتیب اعدادی هستند که خیال کرده



مثال - فرض کنیم شخصی اعداد ۲ و ۶ و ۳ و ۱ و ۵ را خیال

بشد مقدار بر او که سوال میکنند این است

$$[ \{ [ (2 \times 2 + 5) 5 + 10 + 6 ] \cdot 10 + 3 \} \cdot 10 + 1 ] \cdot 10 + 5 = 61315$$

که چون از آن ۳۵۰۰۰ را کم کنیم عدد ۲۶۳۱۵ حاصل میگردد و  
چنانکه ملاحظه میشود ارقام آیند و ترتیب از سمت چپ اعدادی هستند  
که خیال کرده است

برهان - فرض کنیم شخصی  $n$  عدد  $a, b, c, \dots$  خیال کند  
وضاحت که :

$$(2a + 5) 5 + 10 + b = 10a + b + 35$$

$$(10a + b + 35) \cdot 10 + c = 100a + 10b + c + 350$$

$$(100a + 10b + c + 35) \cdot 10 + d = 1000a + 100b + 10c + d + 3500$$

چنانکه دیده میشود عدد صفر با یک جلوی ۳۵ است و عدد از عدد  
اعداد منفروضه کمتر است بقسیمی که نتیجه که بالاخره مقدار بر او سوال میکنند عبارت از

$$\underbrace{1000 \dots 0}_{n-1} a + \dots + 10k + b + 35 \underbrace{000 \dots 0}_{n-2}$$

حال اگر  $\underbrace{111 \dots 1}_{n-2} 35$  را از این حاصل کم کنیم عدد  $n$  رقمی میماند که از قاف  
میش

اعدادی هستند که خیال کرده است

مسئله ذیل که بسیار جالب توجه است یکی از حالات خاص مسئله فوق میباشد  
مسئله - یکی از چند نفر حلقه را یکی از انگشتان خود کرده اند میخواهیم معلوم  
کنیم حلقه در کدام یک از بند های کدام انگشت کدام دست که ام یک از  
آنها است .

برای حل اشخاص را بر طبق شانده و برای هر یک رتبه معین کنید  
(اولی و دومی ... و غیره) و به این طریق برای هر یک از دستها مرتبه  
معین کنید مثلاً مرتبه دست راست را (۱) و مرتبه دست چپ را  
۲ قرار دهید و همین قسم برای انگشتان و بند ها رتبه تعیین نمایند بدین  
که حل مسئله تعیین چهار عدد و راجع میشود

مثلاً فرض کنیم حلقه مفروض در بند دوم انگشت سوم  
دست راست (۱) شخص مفهم باشد بگویند عدد بند را دو برابر نمود  
بجای ۵ واحد اضافه کنید و مجموع را در ۵ ضرب نموده حاصل ضرب را  
با ۱۰ ارجح کرده و رتبه انگشتان (۲) را باین مقدار بیفزایند مجموع را در  
۵ ضرب کنند و بجای ۵ ضرب مرتبه دست (۱) را اضافه نمایند و



بلاخره این حاصل را در ده ضرب کرده مرتبه شخص را با آن جمع کنند نتیجه  
 میشود چون از آن ۳۵۰۰ کم کنید میشود ۲۳۱۷ و از این عدد معلوم است که  
 حلقه : در بند دوم انگشت سوم دست اول (راست) شخص مقیم است!





صورت میگیرد .

مسئله - میخواهیم دو جمله  $۱۰۰ - ۹۰۰a^{۱۰}$  را با حاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم  
 حل - وضحت که  $۱۰۰ - ۹۰۰a^{۱۰} = ۱۰۰[(۱)^۲ - (۳a^۵)^۲]$  حال باید عبارت  
 $(۱)^۲ - (۳a^۵)^۲$  را با حاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم . خلاصه عبارت تفاضل  
 دو مجذور است پس  $(۱)^۲ - (۳a^۵)^۲ = (۱ + ۳a^۵)(۱ - ۳a^۵)$   
 بنابراین :

$۱۰۰ - ۹۰۰a^{۱۰} = ۱۰۰(۱ + ۳a^۵)(۱ - ۳a^۵)$   
 مسئله - عبارت  $(x+y)^۲ - (x-y)^۲$  را با حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید  
 حل - اگر عبارت فوق را که تفاضل دو مجذور است به  $A$  بنماییم :

$A = (x+y+x-y)(x+y-x+y) = ۲y(۲x-۲y)$   
 مسئله - چهار عامل تعیین کنید که حاصل ضربشان  $x^۴ - y^۴$  باشد  
 حل - برای حل مسئله کافی است که  $x^۴ - y^۴$  را با حاصل ضرب چهار عامل  
 تجزیه کنیم برای اینکار دو جمله  $x^۴ - y^۴$  را به ترتیب باین صورت بنویسیم

$$x^۴ - y^۴ = (x^۲ + y^۲)(x^۲ - y^۲) =$$

$$(x^۲ + y^۲)(x^۲ + y^۲)(x^۲ - y^۲) = (x^۲ + y^۲)(x^۲ + y^۲)(x+y)(x-y)$$

مسند - صحت اتحاد های ذیل را بواسطه تجزیه طرف اول آنها حاصل ضرب  
عوامل تحقق کنید .

$$۸^۲ - ۵^۲ = ۱۳ \times ۳, \quad a^۲ - ۹ = (a+۳)(a-۳)$$

$$۴x^۲ - ۱ = (۲x+۱)(۲x-۱), \quad x^۵ - x^۳ = x^۳(x+۱)(x-۱)$$

$$a^۸ - b^۶ = (a^۴ - b^۳)(a^۴ + b^۳), \quad ۱۰۰ - ۱ = (۱۰+۱)(۱۰-۱)$$

$$۹۹۹۱ = (۱۰۰+۳)(۱۰۰-۳), \quad d^۲ - ۱ = (d+۱)(d-۱)$$

$$(a+b)^۲ - c^۲ = (a+b+c)(a+b-c), \quad ۳۶ - ۱ = ۵ \times ۷, \quad ۱ = ۲ \times ۴$$

$$۴۱ = ۸ \times ۵, \quad ۹a^۲b^۲ - c^۲ = (۳ab+c)(۳ab-c), \quad \frac{1}{a^۲} - ۱ = \left(\frac{1}{a}+۱\right)\left(\frac{1}{a}-۱\right)$$

$$(a+b)^۲ - ۴x^۲ = (a+b+۲x)(a+b-۲x)$$

$$(a+b)^۲ - (a-b)^۲ = ۴ab, \quad \frac{a^۲}{b^۲} - \frac{b^۲}{a^۲} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

$$(a^۲+b^۲)^۲ - ۴a^۲b^۲ = (a^۲-b^۲)^۲, \quad (۲a-۳b)^۲ - ۴(a+b)^۲ = ۵b(b-۴a)$$

$$(a+b+c)^۲ - (a-b-c)^۲ = ۴a(b+c)$$

$$a^۲x^۲ - b^۲x^۲(x^۲ - a^۲)^۲ = x^۲(ax - a^۲b + bx^۲)(ax + a^۲b - bx^۲)$$

$$(a^۲+b^۲)^۲ - (a^۲-b^۲)^۲ = ۴a^۲b^۲(a^۲+b^۲)$$

$$x^{۱۶} - y^{۱۶} = (x-y)(x+y)(x^۲+y^۲)(x^۴+y^۴)(x^۸+y^۸)$$



$$x^{12} - y^{12} = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)(x^6 + y^6)$$

$$a^{12} - b^{12} = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)(a^6 + b^6)(a^6 - b^6)$$

۴۴- تجزیه عباراتی که بصورت مجموع یا تفاضل دو مکعب باشند

باید دوتا دواذیل را استعمال کرد

$$(۱) \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(۲) \quad (x^3 + y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

مسئله - دو جمله  $1000y^3 - 1$  را بجا حاصل ضرب تجزیه کنید

$$\text{حل - } 1000y^3 - 1 = (10y)^3 - (1)^3 = (10y - 1)(100y^2 + 10y + 1)$$

مسئله - پنج عامل تعیین کنید که حاصل ضربشان  $x^3y^3z^3 - 8x^6y^6z^6$  باشد

$$\text{حل - باید } x^3y^3z^3 - 8x^6y^6z^6 = x^3y^3z^3(1 - 8x^3y^3z^3)$$

عمل از انقباض راست

$$x^3y^3z^3 - 8x^6y^6z^6 = x^3y^3z^3(x^3y^3z^3 - 8)$$

$$= x^3y^3z^3(xyz - 2)(x^2yz^2 + 2xyz + 4)$$

مسئله - دو جمله  $a^7 + 27a^2b^5$  را بجا حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

$$\text{حل - } a^7 + 27a^2b^5 = a[(a^2)^3 + (3b^2)^3] =$$

$$a(a^2+3b^2)(a^4-3a^2b^2+9b^4)$$

مسئله - عدد ۱۰۰۰۰۰۱ را با حاصل ضرب عددهای تجزیه کنید

حل -  $1000001 = 1000000 + 1 = (100)^3 + 1^3$

$$= (100+1)(100^2-100+1) = 101 \times 9901$$

مسئله - تحقیق کنید که :

$$x^3-1 \equiv (x-1)(x^2+x+1), \quad 1000-x^3 \equiv (10-x)(100+10x+x^2)$$

$$1-y^3 \equiv (1-y)(1+y+y^2), \quad x^3-y^3 \equiv (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$a^3-1 \equiv (a+1)(a-1)(a^2+a+1), \quad 1-x^3 \equiv (1+x)(1-x)(1+x^2+x)$$

$$1x^3+729 \equiv (x^3+9)(7x^2-11x+11)$$

$$56a^3+1 \equiv (7a+1)(8a^2-7a+1)$$

$$(a+b)^3-1 \equiv (a+b-1)(a^2+b^2+ab+a+b+1)$$

$$1001 \equiv 11 \times 91, \quad \frac{a^3}{b^3} - \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b}\right) \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$x^3-y^3 = x(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+y^2) \times$$

$$(x^2-x^2y^2+y^2)(x^2+x^2y^2+y^2)(x^2-x^2y^2+y^2)$$

$$r^{2n}-r^n \equiv (r^{2n}+r^n)(r^{2n}-r^n+1)(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)$$



۲۵- تجزیه مجذور دو جمله و یا تجزیه سه جمله با نیکه مجذور کامل باشد از ملا حظه

$$\text{اتحاد } (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 \quad (۴) \text{ نیاز ج ذیل بدست میاید}$$

۱- برای نیکه سه جمله مفروض مجذور کامل باشد باید وقتی آنرا بحسب قوای

صعودی یا نزولی یکی از حروف مرتب کنیم جمله دوم آن مضاعف حاصل

ضرب جذر دو جمله اول و آخر باشد

۲- وقتی سه جمله مفروض مجذور کامل باشد جذرش مساویست با مجموع

یا تفاضل جذر دو جمله اول و آخر بر حسب اینکه جمله دوم مثبت یا منفی باشد -

دفعه من آنکه گثیرا جمله مفروض بحسب قوای صعودی یا نزولی یکی از حروف

مرتب شده باشد

۳- فرض کنیم  $x^2$  و  $y^2$  دو جمله طرفین مجذور بینی باشند اگر مضاعف جذر

حاصل ضرب این دو مقدار یعنی  $2xy$  را به  $x^2 + y^2$  بیفزاییم یا نقصان

کنیم حاصل مجذور کامل میشود و جذرش  $x \pm y$  میباشد

۴- فرض کنیم  $x^2$  و  $y^2 \pm 2xy$  دو جمله اول مجذور بینی باشند جمله اول آن

$x$  است و جمله دومش خارج قسمت  $y \pm 2xy$  بر مضاعف جمله اول

یعنی  $y \pm \frac{2xy}{2x}$  پس بسیم مطلوب  $x \pm y$  میباشد و جمله که باید

به  $x^2 \pm 2xy$  افشند و تا حاصل مجذور کامل گردد  $y^2$  است

مسئله - از بین کثیرالاجزاء  $x^2 - 2x - y^2$ ،  $a^2 + 2ab + b^2$  و  $x^2 - 6xy + 9y^2$  آنهایی که مجذور کاملند معین نموده جذرشان را بدست آورید

حل - از بین کثیرالاجزاء فوق فقط درومی و سومی شرط (۱) صدق میکنند و بنا براین مجذور کاملند - جذر دومی مجموع جذر  $a^2$  و  $b^2$  یعنی  $a+b$  است و جذر سومی تفاضل جذر  $9x^2$  و  $y^2$  یعنی  $3x - y$  میباشد

مسئله - بنا بر آنکه  $x^2 + ax$  دو جمله اول مجذور بیینی باشد آن بیینی کدام است؟ چه مقداری به  $x^2 + ax$  اضافه کنیم تا مجذور آن بیینی بدست آید؟

حل - جمله اول مطلوب  $x$  و جمله دوشس  $\frac{a}{4}$  است پس

مطلوب  $x + \frac{a}{4}$  میباشد  $(x + \frac{a}{4})^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{16}$  پس برای اینکه  $x^2 + ax$

مجذور کامل شود باید بر آن  $\frac{a^2}{16}$  را افشند و

مسئله - از بین کثیرالاجزاء های ذیل آنهایی را که مجذور کاملند معین نموده و جذر

آنها را بدست آورید

کثیرالاجزاء

جذر



$$a-b$$

$$a^2-2ab+b^2$$

مجدور کامل نیست

$$a^2+2a^2b^2+2b^2$$

مجدور کامل نیست

$$2xy-2x^2-y^2$$

$$\sqrt{5}(2a-11)$$

$$10a^2-220a+500$$

$$1-2m.$$

$$1-2m+2m^2$$

مجدور کامل نیست

$$x^2-2x+2$$

$$a+b-2$$

$$(a+b)^2-2(a+b)+122$$

$$a-b-x$$

$$(a-b)^2-2x(a-b)+x^2$$

$$\sqrt{5}+1$$

$$5+2\sqrt{5}+1$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$5-2\sqrt{6}$$

مسند - بنا بر آنکه عبارات ذیل دو جمله طرفین مجدور بینی باشند اولاً این بنیم را

تقسیم کنید تا نیا معلوم کنید هر یک از این عبارات چه مقداری سفینه ایم

تا مجدور آن بنیم بدست آید

مقداری که باید افند

بسیستم

عبارت

$$-2ab+2ab$$

$$a\pm b$$

$$a^2+b^2$$

$4x^2 + y^2$	$3x \pm y$	$-4xy \pm 4xy$
$3a^2 + 2b^2$	$\sqrt{3}a \pm \sqrt{2}b$	$-2ab\sqrt{6} \pm 2ab\sqrt{6}$
$4x^2 + 9y^2 \pm 12xy$	$2x \pm 3y$	$\pm 6x$
$x^2 + 9$	$x \pm 3$	

مسئله - بنابر آنکه عبارات ذیل دو جمله اول مجذور مبنی باشد اولاً آن بنم  
 متعین کنید و ثانیاً معلوم کنید هر یک از این عبارات چه مقداری میسر آید  
 تا مجذور آن بنم بدست آید

عبارت	بنم	مقداری که باید افزود
$x^2 + 2ax$	$x + a$	$a^2$
$x^2 - 2ax$	$x - a$	$a^2$
$4x^2 + 4xy$	$2x + y$	$y^2$
$x^2 - \frac{b}{a}x$	$x - \frac{b}{a}$	$\frac{b^2}{a^2}$
$x^2 + \frac{b}{a}x$	$x + \frac{b}{a}$	$\frac{b^2}{a^2}$

۴۶ - تجزیه عبارتانی که بصورت  $y = ax^2 + bx + c$  باشند -

و اذیت که  $y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$  پس از مجذور کامل کردن  $x^2 + \frac{b}{a}x$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$$

اگر  $b^2 - 4ac$  مثبت یا منفی یا صفر باشد حالت تشخیص می‌دهیم:



اولاً  $b^2 - 4ac > 0$  است در این صورت :

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$y = a \left( x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

ثانیاً اگر  $b^2 - 4ac = 0$  باشد نتیجه میشود  $y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$

ثالثاً اگر  $b^2 - 4ac$  منفی باشد تجزیه بعوامل حقیقی ممکن نیست

اگر سه جمله مفروض بصورت  $x^2 + px + q$  باشد نتیجه میشود :

$$x^2 + px + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}$$

حال اگر  $p^2 - 4q > 0$  باشد حاصل میشود :

$$x^2 + px + q = \left( x + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right) \left( x + \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right)$$

و اگر  $p^2 - 4q = 0$  باشد نتیجه میشود  $x^2 + px + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2$  و اگر

$p^2 - 4q < 0$  باشد تجزیه بعوامل حقیقی ممکن نیست

مسئله - در صورت امکان سه جمله  $y = 9x^2 - 26x - 3$  را بحال ضرب

عوامل تجزیه کنید

حل - در اینجا  $a = 9$  و  $b = -26$  و  $c = -3$  است

و چون  $b^2 - 4ac = 114 > 0$  است تجزیه ممکن است برای اجرای عمل تجزیه دستور (۶) را استعمال میکنیم نتیجی میشود:

$$y = 9 \left( x + \frac{-26 - \sqrt{114}}{2 \times 9} \right) \left( x + \frac{-26 + \sqrt{114}}{2 \times 9} \right)$$

$$= 9(x+3)\left(x+\frac{1}{9}\right) = (x+3)(9x+1)$$

مسئله - سه جمله  $y = 12 - x^2 - x$  را بجا ضرب عوامل تجزیه کنید

حل - واضحست که  $y = -x^2 - x + 12$  در این سه جمله  $a = -1$  و  $b = 12$  و  $c = 12$  میباشد و چون  $b^2 - 4ac = 49 > 0$  است تجزیه

با بصورت  $y = -\left(x + \frac{-1 - \sqrt{49}}{2}\right)\left(x + \frac{-1 + \sqrt{49}}{2}\right)$

یا  $y = (x+3)(3-x)$

مسئله - میخواهیم  $x^2 + x + 1$  را بجا ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل - این عبارت بصورت  $x^2 + px + q$  میباشد  $(p=1, q=1)$

و چون  $b^2 - 4q = -3 < 0$  است تجزیه ممکن نیست

مسئله - سه جمله  $x^2 + 2x + 1$  را بجا ضرب عوامل تجزیه کنید

حل -  $-4 = -4 = 4 - 4 = 4$  است پس  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

مسئله - تحقیق کنید که:



$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 - \frac{9}{4}x + 1 = (x-2)(x-\frac{1}{4})$$

$$5x^2 - 11x - 10 = (5x+2)(x-2)$$

$$15x^2 - 29x - 14 = (5x+2)(3x-7)$$

$$12m^2 + mn - 20n^2 = (3m-4n)(4m+5n)$$

$$9x^2 - 9x - 10 = (3x+2)(3x-5)$$

$$(5x^2 - 22x + 21) = 5(x - \frac{11+\sqrt{51}}{5})(x - \frac{11-\sqrt{51}}{5})$$

$$x^2 + x - 1 = \frac{1}{2}(2x+1+\sqrt{5})(2x+1-\sqrt{5})$$

$$x^3 - 5x^2 + 4x = x(x-4)(x-1)$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

تجربه بوال حقیقی ممکن نیست

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3x + 4 \\ x^2 - ax + 1a^2 \\ x^2 + 2x + 1 \wedge 9 \\ 3x^2 - 9x + 10 \end{array} \right.$$

تجزیه بحال  
 حقیقی ممکن نیست  $\{x^2 - 3x + 5$   
 تجزیه کثیر الجمله ها

۴۷- طریق اول - دسته بندی

بواسطه استعمال برآیند کثیر الجمله را که مقصود تجزیه آنست بدو جمله یا دو جمله ها تقسیم میکنیم پس از این تقسیم در صورتیکه دو جمله یا دو سه جمله های مفروض را مناسب اختیار کرده باشیم چند حالت ممکن است وی دهد :

۱- بعد از دسته بندی و تجزیه هر دسته بقواعد سابقه در جمع دستجات حاصل مشترکی یافت میشود و در اینصورت کافی است عمل عامل مشترک گرفتن را بحری سازیم .

مسئله - عبارت  $P = ax + by + bx + ay$  را بجاصل ضرب عامل تجزیه کنید

حل  $P = (ax + ay) + (by + bx) = a(x + y) + b(x + y)$

پس :  $P = (x + y)(a + b)$

مسئله - کثیر الجمله  $x^2 + xy + xz + yz$  را بجاصل ضرب عامل تجزیه کنید

حل  $(x^2 + xy) + (xz + yz) = x(x + y) + z(x + y)$

$= (x + z)(x + y)$



مسئله - عبارت ذیل را با حاصل ضرب عوامل تجزیه نمایید .

$$A = a^2x + abx + ac + aby + b^2y + bc$$

حل -  $A = (a^2x + abx) + (aby + b^2y) + (ac + bc)$

$$= ax(a+b) + by(a+b) + c(a+b)$$

$$= (a+b)(ax + by + c)$$

مسئله - عبارت ذیل را با حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

$$P = ac(a+c) + ab(a-b) - bc(b+c)$$

حل - عبارت فوق را بر حسب قوای نزولی یکی از حروف مثلاً  $a$  مرتب

میکنیم حاصل شود :

$$P = a^2(b+c) - a(b^2 - c^2) - bc(b+c)$$

$$= (b+c)[a^2 - a(b-c) - bc]$$

$$= (b+c)[(a^2 - ab) + (ac - bc)]$$

$$= (b+c)[a(a-b) + c(a-b)]$$

$$= (b+c)(a+b)(a-b)$$

مسئله - بواسطه تجزیه به عوامل تحقیق کنید که :

$$ax - ay + bx - by = (x-y)(a+b)$$

$$a^r + ab + ac + bc = (a+c)(a+b)$$

$$x^r - ax + bx - ab = (x-a)(x+b)$$

$$2x - bx - ay + by = (x-y)(a-b)$$

$$x^r - ax^r - x + a = (x-a)(x+1)(x-1)$$

$$x^r + xy + ax + ay = (a+x)(x+y)$$

$$ry^r - y^r + ry - r = (y^r + r)(ry - 1)$$

$$5x^r - 9ax + 6bx - 3ab = (rx - ra)(rx + rb)$$

$$ra^r + a - 3ar - rb - r = (ra^r + 1)(a - rb)$$

$$ra^r - cab - rax^r + bx^r = (ra - x^r)(ra - b)$$

$$ax^r - ray^r - ra^r x + ra^r y + rayx - 3a^r x \equiv$$

$$a(y - ra)(x - ry + rz)$$

$$4arx + a^r xy + 9a^r bz - rabxz - rax^r - ra^r y =$$

$$a(ra - x)(rx + rbx - ay)$$

$$x^r + x^r y^r + x^r z^r - x^r y - xyz^r + y^r xz^r \equiv$$

$$(x^r + z^r)(x^r + y^r - xy)$$

$$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2) \equiv (ax+by)(bx+ay)$$

$$ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2) \equiv (ax-by)(bx+ay)$$

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) \equiv$$

$$(y-z)(x-y)(x-z)$$

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) \equiv$$

$$-(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)$$

۲- بعد از دسته بندی عبارت مفروض بصورت تفاضل و مجذور بیرون

مسئله - عبارت  $P = 2b^2d - a^2 - c^2 + b^2 + d^2 + 2ac$  را بحاصل ضرب

عوامل تجزیه کنید .

حل -  $P = (b^2 + d^2 + 2bd) - (a^2 + c^2 - 2ac)$

$$= (b+d)^2 - (a-c)^2 = (b+d+c+a)(b+d-a-c)$$

مسئله - میخواهیم کثیر الجمله  $x^3 - 10x + 25 - 12x^2$  را بحاصل ضرب

عوامل تجزیه کنیم

حل - اگر کثیر الجمله فوق را به  $F$  بنامیم :

$$F = (x-5)^2 - (11x^2)^2 = (x-5+11x^2)(x-5-11x^2)$$



سند۔ عبارت ذیل را بحاصل ضرب چار عامل تجزیه کنید

$$A = (m^2 + n^2 + p^2 - q^2 - 2mn) - 4p^2(m-n)^2$$

حل۔ واضحست کہ :

$$A = [m^2 + n^2 + p^2 - q^2 - 2mn - 2p(m-n)] \times$$

$$[m^2 + n^2 + p^2 - q^2 - 2mn + 2p(m-n)]$$

$$= [(m-n)^2 + p^2 + 2p(m-n) - q^2] \times$$

$$[(m-n)^2 + p^2 - 2p(m-n) - q^2]$$

خلاصہ :

$$(m-n)^2 + p^2 + 2p(m-n) = (m-n+p)^2$$

$$(m-n)^2 + p^2 - 2p(m-n) = (m-n-p)^2$$

$$A = [(m-n+p)^2 - q^2] [(m-n-p)^2 - q^2] \quad \text{پس}$$

$$= (m-n+p+q)(m-n+p-q)(m-n-p-q)(m-n-p+q)$$

سند۔ تحقیق کنید کہ :

$$a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2 = (a-x+2b)(a-x-2b)$$

$$a^2 - 2sab + 4b^2 - 4c^2 = (a-2b+2c)(a-2b-2c)$$

$$+a^r + cab + b^r - c^r = (ra + b + c)(ra + b - c)$$

$$+a^r - c^r + c^r x - rx^r = (ra + c - rx)(ra - c + rx)$$

$$c^r - n^r - y^r + rny = (c + n - y)(c - n + y)$$

$$+n^r - y^r - rz^r + ryz = (rn + y - rz)(rn - y + rz)$$

$$a^r - n^r - y^r + b^r + rab + rny = (a + b + n - ry)(a + b - n + ry)$$

$$+a^r - b^r + n^r - y^r - ran + rby =$$

$$(ra - rx + b - ry)(ra - rx - b + ry)$$

$$+cd^r + r b^r - c^r - a^r b^r - d^r + a^r =$$

$$(a^r - r b^r + r c^r - d^r)(a^r - r b^r - r c^r + d^r)$$

$$+sa^{r n + r} - ry^{r n + r} - rx^n y^{n + r} + sb^{r n - r}$$

$$+a^{n + 1} b^{n - 1} + rx^{r n} \equiv$$

$$(sa^{n + 1} - rb^{n - 1} + ry^{n + r} - rx^n) x$$

$$(sa^{n + 1} - rb^{n - 1} - ry^{n + r} + rx^n)$$

۳- بعد از دسته بندی عبارت مفروض بصورت  $x^2 + px + q$

$ax^2 + bx + c$  بیرون بیاید

مسئله - منجھو ہم  $x^2 + xy + 9y^2 - 7x + 21y + 12$  را بحاصل ضرب

عوامل تجزیہ کنیم

حل - عبارت فوق را به  $P$  بنامیم . واضحست کہ :

$$P = x^2 - x(9y + 7) + (9y^2 + 21y + 12)$$

این عبارت بصورت  $x^2 + px + q$  است کہ دراین  $p = -(9y + 7)$

$$\text{و } q = 9y^2 + 21y + 12 \text{ میباشد}$$

$$p^2 - 4q = (9y + 7)^2 - 4(9y^2 + 21y + 12) = 1 \quad \text{پس :}$$

$$P = \left(x + \frac{-9y - 7 - 1}{2}\right) \left(x + \frac{-9y - 7 + 1}{2}\right) \quad \text{بنابراین}$$

$$= (x - 3y - 4)(x - 3y - 3)$$

مسئله - منجھو ہم عبارت  $Q = 3x^2 + xy + 3y^2 - 10x + 10y + 3$

را بحاصل ضرب عوامل تجزیہ کنیم

$$\text{حل - } Q = 3(x^2 - 2xy + y^2) - 10(x - y) + 3$$

$$= 3(x - y)^2 - 10(x - y) + 3$$

این عبارت بصورت  $ax^2 + bx + c$  است کہ در آن

$$a = 3, b = -10, c = 3 \text{ است پس :}$$



$$\begin{aligned} Q &= r(x-y + \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \times r})(x-y + \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \times r}) \\ &= r(x-y-r)(x-y-\frac{1}{r}) \\ &= (x-y-r)(rx-ry-1) \end{aligned}$$

سند - تحقیق کنید کہ :

$$\begin{aligned} rx^r - 1, rxy + a.y^r - rx + ry &\equiv (rx - ry)(rx - ry - 1) \\ rx^r - ry - sy^r + 1, rx + ry + r &= \end{aligned}$$

$$(rx - ra + a^r)(rx - ra^r + ra)$$

$$x^r + xy - rxy^r - ry^r + 1y^r - 1y^r \equiv (x + ry - ry^r)(x - y + ry^r)$$

$$\begin{aligned} rx^r - rax - a^r x + 1ra^r - ra^r - 1a^r &= \\ (rx - ra + a^r)(rx - ra^r + ra) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1rx^r + rxy + rrx - 10y^r + 1xy + r &= \\ (rx + ay + 1)(rx - ry + r) \end{aligned}$$

$$rx^r - ry^r - ryx - z^r = (rx + ry + z)(rx - ry - z)$$

$$\begin{aligned} 1x^r - rax + 1a^r x - 1a^r + 1xa^r + sa^r &= \\ (rx + ra + a^r)(rx - ra + ra^r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 1x^r + xy + rxy^r + y^r + y^r + va^r x + a^r y + a^r &= \\ (vn + y + 1)(n + y^r + a^r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ra^r + a^r y + rny^r + rx^r y^r + a^r y^r + ry^r &= \\ (x + ny + y^r)(rx + rny + ry^r) \end{aligned}$$

$$x^r - ra^r x + a^r - b^r \equiv (x - a^r - b^r)$$

$$(x - a^r + b^r)$$

## ۵۰ - طریقی دوم - استعمال قضیه نر۰ ۴۷

دقیقاً بخواهیم کثیر الجمله مفروض را در صورت امکان با این طریق تجزیه کنیم باید ابتدا آنرا بر حسب قوای یکی از حروف آن مثلاً  $x$  مرتب کنیم و فحست که کثیر الجمله مفروض با این صورت بیرون میآید :

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$$

بعد عوامل  $\frac{c}{a}$  را بر تنب مجای  $x$  در  $f(x)$  قرار میدسیم اگر باز آریکی از آنها مثلاً  $\alpha$   $f(x)$  صفر نشد بنا بر قضیه نر۰ ۴۷  $f(x)$  بر  $x - \alpha$  قابل قسمت است و عبارتۀ آخری  $x - \alpha$  یکی از عوامل  $f(x)$  میباشد و همین طریق سایر عوامل آنرا بدست میآوریم

مسئله - بخواهیم  $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$  را بجا حاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

عوامل  $6$  - عبارتند از  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

خلاصه  $0 = f(-1) = f(+1)$  پس  $x - 1$  یکی از عوامل  $f(x)$  است

$0 = f(-2)$  پس  $x + 2$  نیز عامل دیگر است  $f(2) \neq 0$  و  $f(-3) = 0$

پس  $x - 3$  نیز یکی از عوامل  $f(x)$  میباشد و چون  $f(x)$  از درجه سوم است

عامل دیگری جز  $x - 1, x + 2, x + 3$  ندارد یعنی :

$$f(x) \equiv (x-1)(x+2)(x+3)$$

مکن بود پس از تقسیم عامل  $x-1$  ملاحظه کنیم که  $f(x) \equiv (x-1)(x^2+5x+6)$

(بچه طریق؟) خلاصه  $x^2+5x+6 \equiv (x+2)(x+3)$  پس

$$f(x) \equiv (x-1)(x+2)(x+3)$$

مسئله - میخواهیم  $f(x) \equiv 5x^5 - 22x^4 + 17x^3 + 13x^2 - 152x + 60$

را بجا ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل - عوامل  $15 = \frac{9}{2}$  عبارتند از  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$  خلاصه  $f(\pm 1) \neq 0$

و  $f(2) = 0$  پس  $x-2$  یکی از عوامل  $f(x)$  است و پس از تقسیم معلوم میشود که

$$f(x) \equiv (x-2)(4x^4 - 14x^3 - 11x^2 + 51x - 30)$$

برای سهولت فرض کنیم  $\varphi(x) \equiv 4x^4 - 14x^3 - 11x^2 + 51x - 30$  باشد

پس باید عوامل  $\varphi(x)$  را بدست آورده و خلاصه  $\varphi(2) = 0$  پس  $x-2$  عامل

$\varphi(x)$  هم هست و به سبب سهولت معلوم میشود که :

$$\varphi(x) \equiv (x-2)(4x^3 - 5x^2 - 23x + 15)$$

بقسمتی که  $f(x) \equiv (x-2)^2(4x^3 - 5x^2 - 23x + 15)$

اکنون مقدار داخل پرانتز را به  $\psi(x)$  بنمایم فوراً معلوم میشود که



$\psi(3) = 0$  بنا بر این  $x - 3$  عامل  $\psi(x)$  است

$$4x^2 + 5x - 5 \equiv \frac{1}{4} \text{ و چون } \equiv (x-3)(4x^2 + 5x - 5)$$

$$: \frac{1}{4} (4x+3-\sqrt{29})(4x+3+\sqrt{29})$$

$$\psi(x) \equiv \frac{1}{4} (x-3)(4x+3+\sqrt{29})(4x+3-\sqrt{29}).$$

$$f(x) \equiv \frac{1}{4} (x-2)(x-3)(4x+3+\sqrt{29})(4x+3-\sqrt{29})$$

سند - صحت اتحاد های ذیل را بوسیله تجزیه طرف اول آهنگ به  
حاصل ضرب عوامل تحقیق کنید

$$x^2 - 3x + 2 \equiv (x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 2x + 1 \equiv (x-1)(x^2 + x - 1)$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \equiv (x-1)^3$$

$$x^3 - (\alpha^2 + 1)x + \alpha \equiv (x-\alpha)(x^2 + \alpha x - 1)$$

$$x^4 - 14x^3 + 45x^2 - 12x - 72 \equiv (x+1)(x-3)(x-4-\sqrt{12})(x-4+\sqrt{12})$$

$$x^3 - x(a^2 + ab + b^2) + ab(a+b) \equiv$$

$$(x-a)(x-b)(x+a+b)$$

$$x^3 - p^2(p^2 + p + 1)x - p^4(p+1) \equiv (x+p)(x+p^2)(x^2 - p^2 - p)$$

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = (x+a+b)(x^2 - ax - bx + a^2 + b^2 - ab.)$$

$$x^4 - 6x^2 + 1x - 3 = (x-1)^3(x+3).$$

$$x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 32x^2 - 54x - 45 =$$

$$(x+2)(x-3)(x+3)(x^2 + 2x + 2).$$

$$x^5 - 2x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1 =$$

$$(x-1)^3(x+1)^2(x^2+x+1).$$

(چارمین مسئله تفسیری)  
غیب کوئی.....!

مقدمه - اولاً فرض کنیم  $N$  عدد زوجی باشد اگر  $n$  خارج قسمت

این عدد بر ۲ باشد حاصل شود  $N=2n$  یعنی هر عدد زوجی بصورت

$2n$  است (مثلاً  $2=2 \times 1$  و  $4=2 \times 2$  و  $6=2 \times 3$  و  $8=2 \times 4$  و غیره. بعبارة جزئی

بصورت کلی اعداد زوج  $2n$  است

ثانیاً فرض کنیم عدد زوج  $2n$  را دو قسمت که اگر یک واحد بر آن اضافه کنیم عدد حاصل یعنی  $2n+1$  فرد است پس هر عدد فرد بصورت  $2n+1$

(مثلاً  $1=2 \times 0 + 1$  و  $3=2 \times 1 + 1$  و  $5=2 \times 2 + 1$  و  $7=2 \times 3 + 1$  و غیره) و بعبارة آخری

صورت کلی اعداد  $2n+1$  است

بعد از این مستند می گوئیم شخصی اگر کسی عددی پیش خود خیال کند  
سوال کنید فردا است یا زوج. اگر زوج بود بگوید برآورد آن نصف  
به برابرش اضافه کند و حاصل را ۱ به ۱ طرح نماید. عدد ۹ با بر  
که در حاصل محتوی بوده سوال نمود و برابر کنید حاصل عددی میشود که خیال  
کرده بود (مثلاً اگر عدد ۸ را خیال کرده باشد مستند را بر آن سوال  
کرده اید اینست  $2 = 9 - (3 \times 8 + \frac{3 \times 9}{4})$  و اینست که  $8 \times 2 = 16$   
اگر عددی که خیال کرده فرد بود بگوید بر سه برابر آن یک واحد اضافه نمود  
نصف حاصل را با سه برابر آن عدد جمع کند و از مجموع ۵ واحد یکا هفتاد و پنج  
قسمت تفصل را بر ۹ سوال نمود و آنرا مضاعف کند و یک واحد بجا  
بنویسند عددی که خیال کرده بود حاصل میشود (مثلاً اگر ۸ خیال کرده باشد  
مقدار یک سوال میکنید عبارتست از  $5 = 9 - (3 \times 11 + \frac{3 \times 11}{4} + 1)$   
و اینست که  $11 = 5 \times 2 + 1$ )

برهان - می دانیم صورت کلی اعداد زوج  $2n$  و صورت کلی  
اعداد فرد  $2n+1$  است خلاصه در حالت اول یک عدد  $2n$  بحری



شده اند عبارتند از :

$$2n \times 3 = 6n, \quad 5n + \frac{5n}{2} = 5n + 3n = 8n$$

$$9n : 9 = n, \quad n \times 2 = 2n$$

چنانکه دیده میشود چون اعمال مذکوره بجا آوریم عدد مطلوب حاصل میشود  
در حالت دوم اعمالیکه بر عدد  $2n+1$  جاری شده اند چنینند :

$$3(2n+1) = 6n+3 \quad \text{و} \quad \frac{5n+3+1}{2} = 3n+2$$

$$(6n+3) + (3n+2) = 9n+5, \quad 9n+5-5 = 9n$$

$$9n : 9 = n \quad \text{و} \quad 2 \times n + 1 = 2n+1$$

و این نیز عدد مطلوب میباشد

# فصل پنجم

تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک (بعم) و کوچکترین مضرب مشترک (ککم) عبارات

مسائل مختلف

تعیین بعم و ککم عبارات جبری چند حالت تشخیص میدهد  
۵۱- حالت اول - عبارات مفروضه را میتوان ب حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد

در این حال :

اولاً برای بدست آوردن بعم آنها عوامل مشترک را با نمانده کوچکتر اختیار  
نموده در بعم ضرب میکنیم تا نیا برای تعیین ککم آنها عوامل مشترک را  
با نمانده بزرگتر اختیار نموده در بعم ضرب نماییم

مسئله - مطلوب است بعم و ککم  $3a^2bcx, -2a^2b^2cx^2, 5c^2x, va^2cb^2x^2$

حل - مطابق قاعده فوق :

مسئله - بعم و ککم  $x^5 - xy^2, x^3 + x^2y + xy + y^2$   
حل - واضحست که :

$$x^5 - xy^2 = x(x^2 + y)(x^2 - y)$$

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = (x + y)(x^2 + y)$$

پس :  $\text{معم} = x^2 + y$

$\text{کم} = x(x^2 + y)(x^2 - y)(x + y)$

۵۲- حالت دوم - آنگاه یکی از عبارات را میتوان بجا میل ضرب عوامل تجزیه کرد و در این صورت کافی است تحقیق کنیم که کدام یک از عوامل آن عامل سایر عبارات هستند. با نظریت معم آنها بدست میآید. برای متعین کم طریقی را که در حساب معمول است استعمال میکند

مسئله - معم و کم و کثیرا بحد  $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

و  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  را بدست آورید

حل -  $f(x) = (x-1)(x-2)$  خلاصه  $f(1) = 0$  ،  $f(2) \neq 0$

پس  $x-1$  معم و کثیرا بحد مفروض است و معم اینها این است

$$\frac{f(x)}{x-1} \times f(x) = (x-2)(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$$

۵۳- حالت سوم - وقتی تجزیه بچیک از عبارات سهولت ممکن نباشد طریقی

نزد بانی استعمال میشود مثلاً فرض کنیم مقصود تعین معم و کم



ست  
 $p(x) = (x^3 - 2x^2 - 2x - 9)$  با صورت عمل از بقا

$x$	$\begin{array}{r} 4x^3 - 4x^2 - 22x - 9 \\ 4x^3 - 5x^2 - 21x \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1x^3 - 2x^2 - 52x - 39 \\ 1x^3 - 2x^2 - 21x \\ \hline \end{array}$	$2$
$2x$	$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x - 9 \\ 2x^2 - 2x \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 4x^2 - 5x - 21 \\ 4x^2 - 4x - 11 \\ \hline \end{array}$	$2$
$3$	$\begin{array}{r} 2x - 9 \\ 2x - 9 \\ \hline \end{array}$	$x - 3$	

توضیح - کثیر الجمله  $f(x)$  را به  $p(x)$  تقسیم کردیم خارج قسمت ۲ و باقیمانده

$4x^2 - 5x - 21$  شد مقسوم علیه سابق یعنی  $p(x)$  را با این باقی مانده

تقسیم کردیم خارج قسمت  $x$  و باقیمانده  $2x^2 - 3x - 9$  گردید عمل را

بهین طریق است دادیم آخرین مقسوم علیه یعنی  $x - 3$  به هم دو کثیر الجمله

برای تعیین کم آنهایی که از دو کثیر الجمله را بر ۳ - تقسیم نموده خارج قسمت را

دیگری ضرب میکنیم

سند - مطلوبت بزرگترین مقسوم علیه کوچکترین مضرب مشترک عبارات

کلم	معم	ذیل عبارت
$x^2y^2(x^2-y^2)$	$x+y$	$x^2y^2+x^2y, x^2-y^2$
$(x+y)(x^3-y^3)$	$x-y$	$x^2-y^2, x^3-y^3$
$2ab(a+b)$	$a+b$	$2a^2b+2ab^2, a+b$

$$\alpha^4 - h^4 \quad \alpha^3 - h^3 \quad \alpha^2 - h^2, \alpha^2 - h^2$$

$$\alpha^3 - h^3 \quad \alpha^2 + \alpha h + h^2 \quad \alpha^2 - h^2, \alpha^2 + \alpha h + h^2$$

مسئله - بیسم و کم  $x^5 + x + 1$  و  $x^5 + 5x + 6$  را نسبت آورید

جواب : بیسم  $x - 3$  و کم  $(x - 2)^2 (x - 3)$

مسئله - بیسم و کم کثیر الجمله ای  $2\alpha^5 - 18\alpha h^2$  و  $3\alpha^2 + 9\alpha h$  را

و  $\alpha^3 + 8\alpha^2 h + 9\alpha h^2$  را معکوس کنید

جواب : بیسم  $\alpha(\alpha + 3h)$  و کم  $\alpha(\alpha + 3h)^2(\alpha - 3h)$

مسئله - کم  $x^5 + x + 1$  و  $x^5 + x + 1$  را نسبت آورید

جواب :  $x^5 - x^2 - 2x - 1$

مسئله - مطلوب است بیسم  $18\alpha^5 x^2 + 2\alpha^2 x^4 + 12\alpha x^3 + 9\alpha^2 x^2 + 27\alpha^3 x$

جواب :  $\alpha(2x + 3y)$

مسئله - مطلوب است بیسم  $4\alpha^4 + 4\alpha^2 - \alpha - 1$  و  $2\alpha^2 + \alpha - 2$

(جواب :  $\alpha + 1$ )

مسئله - مطلوب است محاسبه کوچکترین مضرب مشترک  $x^6 + \alpha x^3 + \alpha^2 x + \alpha^3$

و  $x^6 - \alpha^6$  (جواب :  $x^6 - \alpha^6$ )

مسئله - بزرگترین مقسوم علیه مشترک چهار کثیرالاجزاء

$$2x^3 + 2x^2 - 24x, 2x^3 - 30x^2 + 40x, x^3 - 2x^2 - 3x, 2x^3 - 15x^2 + 11x$$

(جواب  $x^2 - 2x$ )

را معلوم کنید

مسئله - کم  $a^2b - b(b-c)^2, a(a-b)^2 - ac^2$

$(a+c)^2, c-b^2c$  را معلوم کنید

$$abc(a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2c - 2c^2a - 2a^2b):$$

مسئله - محتمل دو کثیرالاجزاء  $x^2 - 2x + 2, 2x^3 - 6x^2 + 5x - 2$

(جواب  $x - 2$ )

را بطریق نزدبانی تعیین کنید

مسئله - ثابت کنید که اگر  $n$  عدد زوجی باشد اعداد وسطه اول زوج و اعداد وسطه آخر فردند.

$$n^2 + n^3, n^2 - 4, n^2 + (n+1)(n-1) + 1, + n + 2$$

$$2n + 2, n + 4, n^2 - n^2, 5n^2 - 5n$$

$$2n + 1, 2n + 3, 5n + 5, (n+1)^2$$

$$(n+1)^2 - 4n$$

$$5n - 1$$

$$7n + 5.$$

مسئله - ثابت کنید که هر عدد صحیحی یکی از صور  $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99$  است



K عدوت صحیح و مثبت

اثبات - واضحست که با قیامده تقسیم هر عدد صحیح مانند  $n$  بر  $۳$  یکی از اعداد  $۰$  و  $۱$  و  $۲$  است در صورت اول اگر خارج قسمت تقسیم  $n$  بر  $۳$  را  $۰$  کنیم نتیجه میشود  $K = ۳n$  و در صورت ثانی اگر خارج قسمت  $K$  فرض کنیم  $n = ۳ + ۱$  و قس علیهذا در حالت آخر

مثال،  $2 \times 3 = 6$  و  $6 + 1 = 7$  و  $7 - 1 = 6$  و  $6 \times 2 = 12$  و  $12 \div 2 = 6$  و  $6 + 2 = 8$  و  $8 - 2 = 6$  و  $6 \times 3 = 18$  و  $18 \div 3 = 6$  و  $6 + 3 = 9$  و  $9 - 3 = 6$  و  $6 \times 4 = 24$  و  $24 \div 4 = 6$  و  $6 + 4 = 10$  و  $10 - 4 = 6$  و  $6 \times 5 = 30$  و  $30 \div 5 = 6$  و  $6 + 5 = 11$  و  $11 - 5 = 6$  و  $6 \times 6 = 36$  و  $36 \div 6 = 6$  و  $6 + 6 = 12$  و  $12 - 6 = 6$  و  $6 \times 7 = 42$  و  $42 \div 7 = 6$  و  $6 + 7 = 13$  و  $13 - 7 = 6$  و  $6 \times 8 = 48$  و  $48 \div 8 = 6$  و  $6 + 8 = 14$  و  $14 - 8 = 6$  و  $6 \times 9 = 54$  و  $54 \div 9 = 6$  و  $6 + 9 = 15$  و  $15 - 9 = 6$  و  $6 \times 10 = 60$  و  $60 \div 10 = 6$  و  $6 + 10 = 16$  و  $16 - 10 = 6$  و  $6 \times 11 = 66$  و  $66 \div 11 = 6$  و  $6 + 11 = 17$  و  $17 - 11 = 6$  و  $6 \times 12 = 72$  و  $72 \div 12 = 6$  و  $6 + 12 = 18$  و  $18 - 12 = 6$  و  $6 \times 13 = 78$  و  $78 \div 13 = 6$  و  $6 + 13 = 19$  و  $19 - 13 = 6$  و  $6 \times 14 = 84$  و  $84 \div 14 = 6$  و  $6 + 14 = 20$  و  $20 - 14 = 6$  و  $6 \times 15 = 90$  و  $90 \div 15 = 6$  و  $6 + 15 = 21$  و  $21 - 15 = 6$  و  $6 \times 16 = 96$  و  $96 \div 16 = 6$  و  $6 + 16 = 22$  و  $22 - 16 = 6$  و  $6 \times 17 = 102$  و  $102 \div 17 = 6$  و  $6 + 17 = 23$  و  $23 - 17 = 6$  و  $6 \times 18 = 108$  و  $108 \div 18 = 6$  و  $6 + 18 = 24$  و  $24 - 18 = 6$  و  $6 \times 19 = 114$  و  $114 \div 19 = 6$  و  $6 + 19 = 25$  و  $25 - 19 = 6$  و  $6 \times 20 = 120$  و  $120 \div 20 = 6$  و  $6 + 20 = 26$  و  $26 - 20 = 6$  و  $6 \times 21 = 126$  و  $126 \div 21 = 6$  و  $6 + 21 = 27$  و  $27 - 21 = 6$  و  $6 \times 22 = 132$  و  $132 \div 22 = 6$  و  $6 + 22 = 28$  و  $28 - 22 = 6$  و  $6 \times 23 = 138$  و  $138 \div 23 = 6$  و  $6 + 23 = 29$  و  $29 - 23 = 6$  و  $6 \times 24 = 144$  و  $144 \div 24 = 6$  و  $6 + 24 = 30$  و  $30 - 24 = 6$  و  $6 \times 25 = 150$  و  $150 \div 25 = 6$  و  $6 + 25 = 31$  و  $31 - 25 = 6$  و  $6 \times 26 = 156$  و  $156 \div 26 = 6$  و  $6 + 26 = 32$  و  $32 - 26 = 6$  و  $6 \times 27 = 162$  و  $162 \div 27 = 6$  و  $6 + 27 = 33$  و  $33 - 27 = 6$  و  $6 \times 28 = 168$  و  $168 \div 28 = 6$  و  $6 + 28 = 34$  و  $34 - 28 = 6$  و  $6 \times 29 = 174$  و  $174 \div 29 = 6$  و  $6 + 29 = 35$  و  $35 - 29 = 6$  و  $6 \times 30 = 180$  و  $180 \div 30 = 6$  و  $6 + 30 = 36$  و  $36 - 30 = 6$  و  $6 \times 31 = 186$  و  $186 \div 31 = 6$  و  $6 + 31 = 37$  و  $37 - 31 = 6$  و  $6 \times 32 = 192$  و  $192 \div 32 = 6$  و  $6 + 32 = 38$  و  $38 - 32 = 6$  و  $6 \times 33 = 198$  و  $198 \div 33 = 6$  و  $6 + 33 = 39$  و  $39 - 33 = 6$  و  $6 \times 34 = 204$  و  $204 \div 34 = 6$  و  $6 + 34 = 40$  و  $40 - 34 = 6$  و  $6 \times 35 = 210$  و  $210 \div 35 = 6$  و  $6 + 35 = 41$  و  $41 - 35 = 6$  و  $6 \times 36 = 216$  و  $216 \div 36 = 6$  و  $6 + 36 = 42$  و  $42 - 36 = 6$  و  $6 \times 37 = 222$  و  $222 \div 37 = 6$  و  $6 + 37 = 43$  و  $43 - 37 = 6$  و  $6 \times 38 = 228$  و  $228 \div 38 = 6$  و  $6 + 38 = 44$  و  $44 - 38 = 6$  و  $6 \times 39 = 234$  و  $234 \div 39 = 6$  و  $6 + 39 = 45$  و  $45 - 39 = 6$  و  $6 \times 40 = 240$  و  $240 \div 40 = 6$  و  $6 + 40 = 46$  و  $46 - 40 = 6$  و  $6 \times 41 = 246$  و  $246 \div 41 = 6$  و  $6 + 41 = 47$  و  $47 - 41 = 6$  و  $6 \times 42 = 252$  و  $252 \div 42 = 6$  و  $6 + 42 = 48$  و  $48 - 42 = 6$  و  $6 \times 43 = 258$  و  $258 \div 43 = 6$  و  $6 + 43 = 49$  و  $49 - 43 = 6$  و  $6 \times 44 = 264$  و  $264 \div 44 = 6$  و  $6 + 44 = 50$  و  $50 - 44 = 6$  و  $6 \times 45 = 270$  و  $270 \div 45 = 6$  و  $6 + 45 = 51$  و  $51 - 45 = 6$  و  $6 \times 46 = 276$  و  $276 \div 46 = 6$  و  $6 + 46 = 52$  و  $52 - 46 = 6$  و  $6 \times 47 = 282$  و  $282 \div 47 = 6$  و  $6 + 47 = 53$  و  $53 - 47 = 6$  و  $6 \times 48 = 288$  و  $288 \div 48 = 6$  و  $6 + 48 = 54$  و  $54 - 48 = 6$  و  $6 \times 49 = 294$  و  $294 \div 49 = 6$  و  $6 + 49 = 55$  و  $55 - 49 = 6$  و  $6 \times 50 = 300$  و  $300 \div 50 = 6$  و  $6 + 50 = 56$  و  $56 - 50 = 6$  و  $6 \times 51 = 306$  و  $306 \div 51 = 6$  و  $6 + 51 = 57$  و  $57 - 51 = 6$  و  $6 \times 52 = 312$  و  $312 \div 52 = 6$  و  $6 + 52 = 58$  و  $58 - 52 = 6$  و  $6 \times 53 = 318$  و  $318 \div 53 = 6$  و  $6 + 53 = 59$  و  $59 - 53 = 6$  و  $6 \times 54 = 324$  و  $324 \div 54 = 6$  و  $6 + 54 = 60$  و  $60 - 54 = 6$  و  $6 \times 55 = 330$  و  $330 \div 55 = 6$  و  $6 + 55 = 61$  و  $61 - 55 = 6$  و  $6 \times 56 = 336$  و  $336 \div 56 = 6$  و  $6 + 56 = 62$  و  $62 - 56 = 6$  و  $6 \times 57 = 342$  و  $342 \div 57 = 6$  و  $6 + 57 = 63$  و  $63 - 57 = 6$  و  $6 \times 58 = 348$  و  $348 \div 58 = 6$  و  $6 + 58 = 64$  و  $64 - 58 = 6$  و  $6 \times 59 = 354$  و  $354 \div 59 = 6$  و  $6 + 59 = 65$  و  $65 - 59 = 6$  و  $6 \times 60 = 360$  و  $360 \div 60 = 6$  و  $6 + 60 = 66$  و  $66 - 60 = 6$  و  $6 \times 61 = 366$  و  $366 \div 61 = 6$  و  $6 + 61 = 67$  و  $67 - 61 = 6$  و  $6 \times 62 = 372$  و  $372 \div 62 = 6$

مسند - ثابت کنید که هر عددی از صورت  $\sqrt{k+1}\sqrt{k} + \sqrt{k}$   $\sqrt{k+2}$

برای هر یک از حالات پیشال بیانورید

مسئله - ثابت کنید که هر عددی یکی از صورت  $r_k + 1$  یا  $r_k$  میباشد. مثال

مسئله - هر عدد صحیح بصورت  $5K+1$   $5K+2$   $5K+3$   $5K+4$   $5K+5$  است

مسئله - ثابت کنید که اگر از مجذور عددی بصورت  $4n+1$  جدا

و احد کم کیتم باقیمانده بر ۳ قابل قسمت است. ۵ مثال بیاورید

مسئله - اگر مجذور عددی بصورت  $100 + 10a + b^2$  تقسیم کنیم

یکوا حد باقی میماند .

مسئله - ثابت کنید که  $(n-1)(n-2)$  هر بر سه قابل قسمت است ۱۰  
 مثال بیاورید طریق اثبات - عدد  $n$  هر چه باشد یکی از عوامل حاصل  
 ضرب فوق بر سه قابل قسمت میباشد

۵۴ - (چند قضیه راجع به اعکس صحیح)

- ۱ - حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی زوج است .
- ۲ - حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی به ۳ قابل قسمت میباشد
- ۳ - اگر هر یک از عوامل جمع بعد وی قابل قسمت باشد مجموع نیز بر آن  
 عدد قابل قسمت است (برای اثبات این مطلب فرض کنیم مجموع چند عامل  
 $ma$  و  $mb$  و  $mc$  که هر یک از آنها به  $m$  قابل قسمت اند  
 چون ملاحظه کنیم که :  $ma + mb + mc = m(a + b + c)$

حکم قضیه ثابت میشود

۵۵ - (قضایای راجع بقوی و راویکا لها)

- ۱ - حاصل ضرب دو یا چند قوه که پایه شان مشترک باشد قوه ایست با همان پایه  
 که نمایند اش مجموع نمایند های عوامل باشد
- ۲ - حاصل ضرب دو یا چند قوه که نمایند آنها مشترک باشد قوه ایست با

همان نمایند که پایه اش حاصل ضرب پایه با باشد

۳- برای اینکه حاصل ضرب چند عامل را بقوه برسانیم کافی است هر یک

از عوامل را با آن قوه رسانده نتایج را در هم ضرب کنیم

۴- خارج قیمت دو قوه که پایه شان مشترک باشد قوه است با همان پایه

که نمایند و اش فضل نمایند مقوم بر نمایند مقوم علیه باشد

۵- برای اینکه قوه را بقوه جدیدی برسانیم کافی است نمایند آنرا در

نمایند و جدید ضرب کنیم

۶- حاصل ضرب ریشه  $m$  ام دو یا چند مقدار مساویست با ریشه هرگاه

حاصل ضرب آن

۷- خارج قیمت ریشه  $m$  ام دو مقدار مساویست با ریشه  $m$  ام خارج

قیمت آنها

۸- قوه  $m$  ام ریشه  $m$  ام یکبار مساویست با ریشه  $m$  ام قوه

$m$  ام آن عده

۹- ریشه  $m$  ام ریشه  $m$  ام یکبار مساویست با ریشه  $m$  ام است

۱۰- برای اینکه مقداری را در اذیکالی ضرب کنیم کافی است آنرا بقوه



نماینده رادیکال رسانیده در مقدار تحت رادیکال ضرب کنیم  
 «- بالعکس برای خارج کردن مقدار از تحت رادیکال کافی است از آن  
 ریشه مساوی نماینده رادیکال گرفته و آنرا جلوی رادیکال بنویسیم .  
 دنیا قوانین اربع بقوی و ریشه را عبارت جبری میسکاریم و بر مقلین است که  
 بیشتر آنها را در خاطر داشته باشند

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}, a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$$

مسئله - تحقیق کنید که

$$\frac{(x^m \cdot y^n \cdot z^h)^r \sqrt[n]{a^{(mr)}} \cdot \sqrt[n]{b^{(nr)}} \cdot \sqrt[n]{c^{(hr)}}}{(ax)^{rm} \cdot (by)^{rn} \cdot (cz)^{rh}} = \frac{1}{a^m \cdot b^n \cdot c^h}$$

$$\sqrt[n]{\{[(ex)^x]^x\}^x} = e^{(x^3)}, \sqrt[n]{a^{-2}} : \sqrt[n]{a^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{2}} \sqrt[n]{a^2}$$

مسئله - صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$\sqrt[n]{a^{-\frac{1}{2}}} + \sqrt[n]{a^{\frac{1}{2}} b} + \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}$$

۵۶- تعریف - دو عبارت  $a + \sqrt{b}$  و  $a - \sqrt{b}$  را مزدوج خوانند

۵۷- قضیه - حاصل ضرب دو عبارت مزدوج مقدار است منطبق

۵۸- تعریف - فرض کنیم مقدار  $a$  و  $N$  و  $x$  را بقسمی که  $N = a^x$

باشد. عدد  $x$  را لگاریتم عدد  $N$  در بنسای  $a$  خوانند و آنرا

با اطلاعات می‌نامند  $N$   $\log x =$  مثلاً  $10^2 = 100$  پس

$$100 = \log_{10} 2 \text{ و چون } 2^5 = 32 \text{ پس } 5 = \log_{10} 32$$

مسئله - مطلوب است  $\log_{10} 1000$

حل - باید عددی مانند  $x$  تعیین کرد بقسمی که  $10^x = 1000 = 10^3$  از این تساوی

$$\text{نتیجه می‌شود } x = 3 \text{ یعنی } \log_{10} 1000 = 3$$

مسئله - مطلوب است محاسبه  $\log_2 8$  و  $\log_4 64$  و  $\log_{10} 1000000$

$$\text{و } \log_{10} \sqrt[5]{10} \text{ و } \log_{27} 3 \text{ و } \log_{16} 4 \text{ و } \log_{25} 5$$

$$\text{جواب بر ترتیب } 3 \text{ و } 3 \text{ و } 6 \text{ و } \frac{1}{5} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{2}$$

۲- مسند مسم - ثابت کنید که  $\log m^n = n \log m$ ,  $\log m^n = \log m + \log n$

$$\log \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log m, \log \frac{m}{n} = \log m - \log n$$

مسئله - بنابر آنکه  $\log_{10} 2 = 0.30103$  با حساب کنید  $\log_{10} 4$ ,  $\log_{10} 8$

$\lg \sqrt{2}$  ,  $\lg 2$  ,  $\lg 4$  ,  $\lg 8$  ,  $\lg 16$  ( بنای لگاریتم عدد ده است )

(ج) ب تریب  $0.60206$  ,  $0.90309$  و  $0.51505$  ,  $0.30103$  ,  $0.17609$

و  $0.60206$  ,  $0.51505$  ,  $0.30103$

( پنهان مسئله تقسیری )

شخصی را در یکی از دو دست خود گرفته است معلوم کنید آن شیء

در کدام یک از دو دست او میباشد .

حل - بگوئید برای دستی که شیء در آنست عدد زوجی و برای دست

خالی عدد فردی قرار دهد بعد از آنکه عدد دست راست را

عدد زوجی ضرب کند و حاصل ضرب را با عدد دست چپ جمع کند

مجموع را سوال کنید . اگر مجموع فرد بود آن شیء در دست است

و الا در دست چپ است .

اثبات این قضیه بسیار سهل است و ما آنرا بعنوان مشق بعد از مقدمات

میگذاریم

ششین مسئله تقسیری

میتوانید عددی را که فکر کرده ایم بگوئید !



با خواندن مطالب ذیل سهولت از غمده قلم مستند بر میانید

بگویند عددی را که خیال کرده در سه عددی که میخواهید ضرب کنند حاصل را به سه عددی که بایست تقسیم کنند و این عمل را هر قدر شما میخواهید تکرار کنند بعد از آنکه رسید حاصل را به عددی که خیال کرده است قسمت نمایند و خارج قسمت را با عددی که فکر کرده جمع نمایند و حاصل شما بگویند در ضمن اینکه اوشنول با انجام اواخر شما است تمام اعمالی را که با و میگویند در باب عدد دیگر فکر کرده انجام دهد خودتان نیز با احوال انجام دهید و وقتی عمل تمام شد حاصل را از محسوس عکس از او سوال کرده بودید نقصان کنید یا قنانه عددیست که خیال کرده است .

مثلاً فرض کنیم شخصی عدد ۲۴ را خیال کرده باشد بگویند که آنرا در ۵ ضرب نموده حاصل را به ۱۰ تقسیم کنند و مجدداً حاصل را به ۳ تقسیم نمایند و خارج قسمت را بعد دیگر فکر کرده قسمت نمایند و خارج قسمت حاصل را به عدد دیگر فکر کرده بنویسند و مجموع را که عدد  $\frac{295}{12}$  است شما میگویید ضمناً خودتان اعمال فوق را با احوال انجام دهید حاصل چنین میشود

$$\frac{295}{12} - 1 = 24 \text{ و صحت که } \frac{5 \times 12}{10 \div 3 \times 3} = \frac{2}{12}$$

اثبات این قضیه نیز بسیار سهل است

## فصل ششم - کسره جبری

۵۹- تجزیه کسر بساوه ترین صورت خود - برای تجزیه کسر بساوه

ترین صورت خود است. ا صورت و مخرج آنرا با حاصل ضرب عوامل تجزیه نمود

بعد عوامل مشترک را از صورت و مخرج حذف میکنیم.

مسئله - کسر  $\frac{9a^2b + 12ab^2}{9a^3b - 15ab^3}$  را غیر ممکن التحویل کنید

حل -  $\frac{3ab(3a+4b)}{3ab(3a^2-5b^2)} = \frac{3a+4b}{3a^2-5b^2}$  کسر مفروض

مسئله - کسر  $y = \frac{3x^3 - 13x^2 + 22x - 11}{15x^3 - 18x^2 - 2x + 1}$  را مختصر کنید

حل - فوراً معلوم میشود که :

$$y = \frac{(3x-7)(x^2-2x+3)}{(3x-7)(5x^2-x-3)} = \frac{x^2-2x+3}{5x^2-x-3}$$

مسئله - کسر  $\frac{(ab+1)^2 - (a+b)^2}{(a^2-1)(b^2-1)}$  را بساوه ترین صورت خود تجزیه کنید

$$A = \frac{(ab+1+a+b)(ab+1-a-b)}{(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)}$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)}{(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)} = 1$$

مسئله - کسر  $y = \frac{2x^3 - 4x^2 + 5x - 33}{2x^3 - 7x^2 + 9x - 11}$  را غیر ممکن التحویل نماید

حل - به سبب معلوم میشود که  $(x-3)(2x^2-x+6)$  مختصراً



حال بپسینیم که ام یک از عوامل مخرج در صورت موجود است : اگر صورت را

$$f(x) = f(x) \text{ بنمایم دید میشو که } f(3) = 0 \text{ پس } f(x) = x-3$$

قابل قسمت است و پس از تقسیم معلوم میشو

$$f(x) = (x-3)(2x^2 + 2x + 11)$$

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 11}{2x^2 - x + 6}$$

سند تحقیق کنید که :

$$\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x+y}, \quad \frac{x^2-y^2}{x+y} = x-y, \quad \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{xy-2y^2} = \frac{x-y}{y}, \quad \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{x+y}, \quad \frac{x^3y-xy^3}{x^2y-xy^2} = \frac{xy}{1}$$

$$\frac{ax}{a^2x^2-aa} = \frac{1}{ax-1}, \quad \frac{10a^2b^2c^2}{100(a^2-a^2b)} = \frac{b^2c^2}{10(a-b)}$$

$$\frac{11a^2c^2x^2-tac^2}{11a^2x^2-11a^2x^2-11a-11x}, \quad \frac{x^4y-x^2y^2z}{x^2y^2-y^2z} = \frac{x^2(x^2+y^2)}{y^2}$$

$$\frac{x^2+2xy+12y^2}{x^2-2xy-10y^2} = \frac{x+4y}{x-2y}, \quad \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2} = \frac{4x^2+1}{4x(x+1)}$$

$$\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{(a^2-b^2)(a^2-b^2)} = \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{-6a^2+6a^2b+66a^2b^2}{-12a^2(a^2-121b^2)(a^2-b^2)} = \frac{1}{2a^2(a+11b)(a-b)}$$

$$\frac{(10a^2+10b^2)(10x^2-2xy)}{(11a^2+12b^2)(10xy-2y^2)} = \frac{5x}{x+y}$$

$$\frac{ac+ad+bc+bd}{ax+bx+ay+by} = \frac{c+d}{x+y}$$

$$\frac{3x^2y^2+2x^2y^2-2ax^2y^2}{x^2-y^2} = \frac{2ax^2y^2}{x^2-y^2}$$



$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x^3 - 11x^2 + 9x + 5} = \frac{x(x+4)}{x^3 - 11x^2 - 5}$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + 3x + 2} = \frac{x+1}{x^2 + 2}$$

$$\frac{(a^3 + 2a^2x + x^3)(a^2 - x^2)}{(a^2 + x)(a^3 - a^2x + a^2x^2 - x^3)} = a^2 + x^2$$

$$\frac{a^5 + a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + b^5}{a^4 + b^4} = a^2 - ab + b^2$$

۶۰- تبصره - باید در نظر داشت که :

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{-b}$$

یعنی : اولاً اگر علامت هر دو جزء کسری بی صورت و مخرج از تغییر  
دویم علامت کسر تغییر نگیرد. ثانیاً اگر علامت یکی از دو جزء کسر بر آید و دویم  
علامت کسر تغییر میکند.

$$\text{مسئله - کسر } \frac{(y-x)(x-t)}{(x-y)(t^2-x^2)} = A \text{ را مختصر کنید}$$

حل - چون ملاحظه کنیم که  $y-x = -(x-y)$  حاصل می شود .

$$A = \frac{[-(x-y)][-(t-x)]}{(x-y)(t+x)(t-x)} = \frac{1}{t+x}$$

مسئله تحقیق کنید که :

$$\frac{a^2 + ab - b^2}{b^2 - a^2} = -\frac{a+2b}{a+b}, \quad \frac{x-y}{y-x} = -1, \quad \frac{-a^2}{+a^2b} = -\frac{1}{b}$$

$$-\frac{-x^2+y^2}{y^2+x^2} = x^2-y^2$$

$$-\frac{-(y^2-x^2)}{-(y^2-x^2)} = y^2-x.$$

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2-b^2-a^2c^2}{a^2b+a^2c-abc-ab^2} = \frac{(a+b)(b-c)}{a}.$$

$$\frac{am-ax+bm-cx+bx-bx}{ap^2+bp^2+ap^2+cp^2+bx^2+cx^2} = \frac{m-x}{p^2+x^2}$$

$$-\frac{[(x-y)(y-z)(z-x)]}{(y-x)(z-x)[- (x-z)]} = 1$$

$$\frac{a^2+x^2-b^2-2bc+2ax-c^2}{x^2+b^2-c^2+2bx-2ac-a^2} = \frac{x+a-b-c}{x-a+b-c}.$$

$$\frac{(b^2-c^2)a^2+a(2bc^2-2b^2c)-(b^2-c^2)}{a(b+c)+(b^2+c^2)} =$$

$$(b-c)a-(b^2-c^2).$$

$$(b-c)a-(b^2-c^2).$$

$$-\frac{-[-(x-y)+(y-x)]}{x+[-(y-2x)-x]} = \frac{2(y-x)}{2x-y}.$$

۶۱- رفع و تجزیه - قاعده رفع و تجزیه کوچری عینا قواعدی است

که در اجزای این دو عمل بر کسور حسابی ذکر شده

سند - کسر  $\frac{x^3+1}{x^2+1}$  را رفع کنید.

حل - چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت  $x$  و باقی مانده  $1-x$

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

پس

سند - در عبارت  $a^2+ax+x^2+\frac{2x^3}{a-x}$  عمل تجزیه را بجا آورید

حل۔ اگر عبارت فوق را به  $P$  بنمائیم،

$$P = \frac{(a^2 + ax + x^2)(a - x) + 2x^3}{a - x} = \frac{a^3 + x^3}{a - x}$$

۲۔ سند۔ صحت تساویهای زیر بواسطه عمل رفع تحقیق کنید.

$$\frac{5a^2 + 13ab + 7b^2}{2a + 3b} = 3a + 2b + \frac{b^2}{2a + 3b}$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 5}{x^2 + 2x - 5} = x + 2 - \frac{2x - 3}{x^2 + 2x - 5}$$

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 4x - 17}{2x - 3} = 2x^2 + 2x + 5 - \frac{2}{2x - 3}$$

$$\frac{2x^3 + 4x^2 - 3x + 3}{x^3 + 3x^2 - 4x + 3} = 2 - \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 + 3x^2 - 4x + 3}$$

۱۰۔ سند۔ صحت تساویهای زیر بواسطه عمل رفع تحقیق کنید.

$$a + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b}{a}, \quad a - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b}{a}, \quad 1 + \frac{2ab + b^2}{a^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2}$$

$$a - 1 + \frac{1 + a^2}{a + 1} = \frac{2a^2}{a + 1}, \quad a - 1 + \frac{2}{a - 1} = \frac{a^2 + 1}{a + 1}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + a - b = \frac{2a^2}{a + b}, \quad 1 + \frac{5}{x + 2} = \frac{x + 7}{x + 2}$$

$$\frac{x + y + 2}{x + y} - 1 = \frac{2}{x + y}, \quad a + b - \frac{a^2}{a - b} = \frac{b^2}{b - a}$$

$$x + 2y - \frac{x^2 - 2xy + 4y^2}{x + 2y} = \frac{4xy}{x + 2y}$$

$$2x - 5x^2 + 11x^5 - \frac{54x^3}{1 + 3x^2} = \frac{2x}{1 + 3x^2}$$

$$x^2 + 2x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^2}$$



۶۲ - جمیع قواعدی که در حساب در باب کسور حسابی ذکر شده در کسور جبری  
تجزی می شود

مسئله - مطلوب است مجموع سه کسر  $\frac{a^2-2c}{40}$ ,  $\frac{a+c}{8}$ ,  $\frac{2a-c}{5}$   
حل ابتدا که کسر فوق را بکوچکترین مخرج مشترک تحویل بکنیم و خواهیم دید  
کوچکترین مخرج مشترک کوچکترین مضرب مشترک مخرج است و آن در  
اینجا ۴۰ میباشد. برای بدست آوردن صورت جدید هر کسر کوچکترین  
مخرج مشترک یعنی ۴۰ را بمخرج سابق آن تقسیم نموده خارج قسمت را در  
آن ضرب میکنیم و نتیجه میشود:

$$\text{صورت جدید کسر اول} = (40:20)(a^2-2c) = 2a^2-4c$$

$$\text{صورت جدید کسر دوم} = (40:8)(a+c) = 5a+5c$$

$$\text{صورت جدید کسر سوم} = (40:5)(2a-c) = 16a-1c$$

بقیسه که کسر فوق به کسر ذیل تبدیل میشوند:  $\frac{2a^2-4c}{40}$ ,  $\frac{5a+5c}{40}$ ,  $\frac{16a-1c}{40}$  پس اگر مجموع آنها را به S بنمایم:

$$S = \frac{2a^2-4c+16a-1c+5a+5c}{40} = \frac{2a^2+21a-2c}{40}$$

مسئله - عبارت  $\frac{2a+3b}{3} - \frac{a+b}{15}$  را مختصر کنید

حل - اگر تفاضل فوق را به ۵ بنمایسم :

$$0 = \frac{a+b}{15} - \frac{5(2a+3b)}{15} = \frac{a+b-5(2a+3b)}{15}$$

$$= -\frac{9a+14b}{15}$$

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$\frac{29a}{90} - \frac{3a-20b}{90} + \frac{3a-10b+5c}{20} - \frac{4a-2b+3c}{12} = M$$

حل - کوچکترین مخرج مشترک ۱۸۰ است ،  $\frac{29a}{90} = \frac{51a}{180}$  ،  $\frac{3a-20b}{90} = \frac{2(3a-20b)}{90}$

$$\frac{3a-2b+3c}{12} = \frac{15(3a-2b+3c)}{120} , \frac{4a-2b+3c}{12} = \frac{30(4a-2b+3c)}{360}$$

$$\frac{50a-20b+45c}{180}$$

بنابراین  $M = \frac{51a}{180} - \frac{2(3a-20b)}{180} + \frac{15(3a-2b+3c)}{180} - \frac{30(4a-2b+3c)}{360}$

$$M = \frac{51a - 6a + 40b + 45a - 60b + 45c - 30a + 60b - 45c}{180}$$

اتمام برتعم است

مسئله - مطلوب است مجموع  $\frac{1}{x^2-5x+6}$  ،  $\frac{1}{x^2-4x+3}$  ،  $\frac{1}{x^2-3x+2}$

حل - فوراً معلوم میشود که :

$$(x-1)(x-2)(x-3) = \text{کوچکترین مضرب مشترک} : \text{کم فحاج}$$

$$\text{صورت جدید کسرها اول} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = x-3$$

$$\text{صورت جدید کسر دوم} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = x-2$$

$$\text{صورت جدید کسر سوم} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = x-1$$

پس اگر S مجموع مطلوب باشد

$$S = \frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{(x-1)(x-3)}$$

مسئله - عبارت  $\frac{1}{x-a} - \frac{3}{x+a} + \frac{2x}{(x+a)^2}$  را مختصر کنید.  
حل - فوراً معلوم میشود که :

$$\begin{aligned} \text{عبارت مفروض} &= \frac{x^2 + 2ax + a^2 - 3x^2 + 3a^2 + 2x^2 - 2ax}{(x-a)(x+a)^2} \\ &= \frac{4a^2}{(x-a)(x+a)^2} \end{aligned}$$

مسئله ۲۲ - تحقیق کنید

$$\frac{a+1}{5} + \frac{b-1}{5} + \frac{r-a+rb}{5} + \frac{r}{5} = \frac{rb+a}{5}$$

$$\frac{a}{15} + \frac{b}{15} - \frac{c+a}{15} - \frac{a+b+c}{15} = \frac{-rc-a}{15}$$

$$\frac{ra+rb}{9} - \frac{2a-rb}{15} - \frac{5a+11b}{45} = \frac{1 \cdot b - ra}{15}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}, \quad \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{-1}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} = \frac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}, \quad \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{2x+5}{x^2+5x+6}$$



(11v)

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} - \frac{rx}{1-x^r}, \quad \frac{rx+a}{ra} + \frac{ax-ra}{qa} = \frac{11x-a}{qa}$$

$$\frac{x-ry}{xy} + \frac{ry-a}{ay} = \frac{rx-ra}{ax}, \quad \frac{rx-ra}{x-ra} - \frac{rx-a}{x-a} = \frac{ar}{x^r-rax+ri^r}$$

$$\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} + \frac{a^r+x^r}{a^r-x^r} = \frac{a^r+rx+x^r}{a^r-x^r}$$

$$\frac{r}{x} - \frac{r}{rx-1} - \frac{rx-r}{rx^r-1} = \frac{r}{x(1-rx^r)}$$

$$\frac{r}{x-r} - \frac{r}{x-r} + \frac{1}{x} = \frac{1r-x}{x(x^r-rx+1r)}$$

$$\frac{x^r+ax-y-ryr}{x^r-1ry^r} - \frac{rx^r+1xy}{rx^r+1xy} = \frac{x}{x-ry}$$

$$\frac{a+r}{a-r} - \frac{a+r}{a-r} - \frac{1}{a^r-1r} = \frac{ar}{(a^r-1r)(a-r)}$$

$$\frac{x^r-rx+1}{x^r-1rx+rv} + \frac{ax}{x-q} - \frac{sx}{x-r} = \frac{rvx+1}{x^r-1rx+rv}$$

$$\frac{x-r}{rx-1} - \frac{rx-a}{x+r} + \frac{ax^r+qx+1r^r}{rx^r+rx-r} = \frac{r \cdot x+1}{rx^r+rx-r}$$

$$\frac{r}{(x+1)^r} + \frac{1}{(x-1)^r} + \frac{r}{x-1} = \frac{rx^r-rx+r}{(x-1)^r}$$

$$-\frac{r}{(x-1)^r} - \frac{s}{x-1} + \frac{v}{x-r} + x+r = \frac{x^r+1}{(x-1)^r(x-r)}$$

$$\frac{rx-vx^r-rx^a}{(1+x^r)^r(a-rx^r)} = \frac{\frac{v}{r} + \frac{r}{r}x}{(1+x^r)^r} + \frac{\frac{r}{q}x - \frac{r}{q}}{(1+x^r)^r}$$

$$\frac{\frac{rv}{rv} - \frac{rv}{rv}}{1+x^r} = \frac{-vv + s1x + rv \frac{v}{q} x^r - rrx^r}{rv(a-rx^r)} \equiv 0$$

$$\frac{a}{r(x+1)^r} + \frac{v}{r(x+1)} - \frac{r}{x} + \frac{a}{r(x-1)} =$$

$$\frac{r-rx+rx^r}{x^r+x^r-x^r-x}$$

مسئله - عبارت  $A = \frac{3x}{1-x^2} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}$  را مختصر کنید

حل - کوچکترین مخرج دو کسر اخیر  $x^2 - 1$  است و چون مخرج کسر اول

$(x^2 - 1)$  - میباشد علامت جلته این را تغییر میدیم نتیجتاً میشود

$$A = \frac{-3x}{x^2-1} - \frac{2x+2}{x^2-1} - \frac{2x-2}{x^2-1}$$

انجام برستقیم است

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید

$$A = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

حل - چون ملاحظه کنیم که  $-(b-c)(a-b) =$  مخرج کسر دوم

$(a-c)(b-c) =$  مخرج کسر سوم نتیجتاً میشود :

$$A = \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(b-c)(a-b)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

اینک د اخذت که مخرج مشترک  $(a-b)(b-a)(a-c)$  میباشد پس

$$A = \frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{0}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 0$$

- چنانکه ملاحظه میشود استعمال تبصره نمره ۵۰ و اغلب باعث سهولت

و اختصار عمل میشود و در مسائل باید قواعد مذکوره در آن تبصره را مراعات کرد

مسئله - تحقیق کنید که :

$$B = \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} + \frac{c+a}{(b-a)(b-c)} + \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} \equiv 0$$

مسئله - صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید

$$y = \frac{x^2 - a - b}{(c-a)(c-b)} + \frac{x^2 - c - a}{(b-a)(b-c)} + \frac{x^2 - b - c}{(a-b)(a-c)} \equiv 0$$

حل - فوراً معلوم میشود که :

$$y \equiv Ax^2 + B \equiv 0$$

A و B کسری هستند که در دو مسئله فوق متحد بودن آنها با صفر تحقیق

طریق دیگر - نسبت به x از درجه دوم است ولی باز ارزش

$$\text{مست} \quad x = \pm\sqrt{b+c} \quad \text{و} \quad x = \pm\sqrt{a+c} \quad \text{و} \quad x = \pm\sqrt{a+b}$$

صفر میشود پس  $y \equiv 0$

مسئله - تحقیق کنید که :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \equiv 0$$

$$\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} - \frac{2}{y-z} - \frac{2}{z-x} - \frac{2}{x-y} \equiv 0$$

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \equiv 1$$

$$\frac{y-z}{x^2 - (y-z)^2} + \frac{z-x}{y^2 - (z-x)^2} + \frac{x-y}{z^2 - (x-y)^2} \equiv 0$$



$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \equiv a+b+c$$

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)} \equiv 0.$$

$$\frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2-ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(c-b)} \equiv -1$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \equiv 1$$

مسند - عبارت  $A = \frac{ab+ac}{bd-cd} \times \frac{ab-ac}{bd+cd}$  را مختصر کنید

حل - موافق قاعده ضرب کسرها چنین خواهیم داشت

$$A = \frac{(ab+ac)(ab-ac)}{(bd-cd)(bd+cd)} \equiv \frac{a^2(b^2-c^2)}{d^2(b^2-c^2)} = \frac{a^2}{d^2}$$

مسند - عبارت ذیل را ساده کنید

$$M = \frac{a^2-x^2}{a+b} \times \frac{a^2-b^2}{ax+x^2} \times \left(a + \frac{ax}{a-x}\right)$$

حل - عبارت فوق را تدریجاً چنین میسریم :

$$M = \frac{a^2-x^2}{a+b} \times \frac{a^2-b^2}{ax+x^2} \times \frac{a^2}{a-x} \equiv \frac{a^2(a^2-b^2)(a^2-x^2)}{(a+b)(ax+x^2)(a-x)}$$

$$\equiv \frac{a^2(a-b)}{x}$$

مسند - تحقیق کنید که :

$$3a \times \frac{4a}{5} = \frac{12a^2}{5}$$

$$a^2 \times \frac{3a^2}{9x} = \frac{a^4}{3x}$$

$$(a+b)^2 \times \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b}$$

$$(x-y) \times \frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{ra}{rl} \left( -\frac{ol}{lar} \right) = -\frac{o}{sa}$$

$$\left( \frac{-a}{-b} \right) \left( \frac{+b}{-a} \right) = -1$$

$$\left( \frac{va^m b^{n-1} c^r}{am^n p^{r+1} q^r h} \right)^r = \frac{r+r a^r m^r b^{rn-r} c^r}{o^r m^r n^r p^{r^2+r} q^r h^r}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a^r}{bc} \times \frac{b^r}{ac} \times \frac{c^r}{ab} = 1$$

$$\frac{x^r - y^r}{x^r + y^r} \times \frac{+x}{x+y} = \frac{+x(x-y)}{x^r + y^r}$$

$$\frac{x^r - y^r}{a+b} \times \frac{a^r - b^r}{x+y} = (x-y)(a-b)$$

$$\frac{15x^r - 9a^r}{a^r - r} \times \frac{x-r}{+x-ra} = \frac{+x+ra}{x+r}$$

$$\frac{ax - a^r}{a^r + rax + x^r} \times \frac{a(a+x)}{a^r - rax + x^r} = \frac{ax}{a^r - x^r}$$

$$\frac{a^r - b^r}{a^r + b^r} \times \frac{a+b}{a-b} \times \left( \frac{a^r - ba + b^r}{a^r + ab + b^r} \right)^r = \frac{a^r - ab + b^r}{a^r + ab + b^r}$$

$$(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{(a+b)^r}{ab}$$

$$\frac{1}{a+b} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{ab}$$

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{b^r - a^r}{ab}$$

$$\left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{+a^r}{b^r - a^r} \right) \times \frac{a^r + rab + b^r}{+a} = \frac{(a+b)^r}{a-b}$$

$$\frac{a^r - x^r}{a+b} \times \frac{a^r - b^r}{ax + x^r} \times \left( a + \frac{ax}{a-x} \right) = \frac{a^r(a-b)}{x}$$

$$\frac{x^r - y^r}{x^r - rxy + y^r} \cdot \frac{x-y}{x^r + xy} = \frac{x^r + y^r}{x}$$



$$\frac{1-x^2}{1+y^2+xy} \times \frac{1-y^2}{y^2-2xy+x^2} \times \left( \frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y} \right) =$$

$$\frac{1+x}{(1+y)(x-y)}.$$

$$\left( \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1 \right) \times \left( \frac{a+c-b}{a+b+c} \times \frac{a+b-c}{(b+c-a)} + 1 \right) = 2.$$

سند - عبارت  $x = \frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} : \frac{b^2}{a^2-b^2}$  ساده

حل - موافق قاعده تقسیم کنور :

$$x = \frac{(ab+b^2)(a^2-b^2)}{b^2(a^2-ab+b^2)}$$

اتمام برعهده متعلم است  
جواب  $\frac{(a+b)^2}{(a-b)}$

عاسند - تحقیق کنید که :

$$\left( x + \frac{1-x}{1+x} \right) \left( 1 - \frac{x(1-x)}{1+x} \right) = 1$$

$$\left( \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right) : \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \right) = \frac{ra}{b-a}$$

$$\frac{a^2+2a^2b+2ab^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{2(a+b)^2}{a-b} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}$$

$$\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy} : \frac{x+y+z}{y+z-x} = \frac{x+y-z}{x-y+z}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+a^2b^2+b^2}$$

$$\frac{a^2+ab}{a^2+b^2} : \frac{ab(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{b}$$

$$\frac{rx-ry}{ry+ru} : \frac{rx-ry}{ay+au} = \frac{a}{r}$$



## ۶۳- کسور مرکب

مقصود از کسر مرکب کسری است که صورت و مخرج آن نیز کسر باشند برای  
فقط کردن کسر مرکب باید ابتدا صورت و مخرج آنرا مختصر نمود بعد صورت را

بمخرج تقسیم کرد

مسئله - کسر  $y = \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}}$  را مختصر کنید  
حل - واضح است که

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$$

$$y = \frac{2x}{x^2-1} : \frac{2(x^2+1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

مسئله - عبارت  $x = \frac{\frac{x^2+y^2}{2} - x}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \times \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$  را مختصر کنید

حل - فوراً معلوم میشود که :

$$\frac{x^2+y^2}{2} - x = \frac{x^2+y^2-xy}{2}, \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$$

بقسمتی که  $= \frac{x^2+y^2-xy}{2} : \frac{x-y}{xy} = \frac{x(x^2+y^2-xy)}{2(x-y)}$  کسر اول

$$x = \frac{x(x^2+y^2-xy)}{2(x-y)} \times \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x(x^2+y^2-xy)(x+y)(x-y)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2-xy)} = x$$

پس

(۱۹۴)

سند - کسر مسلسل ذیل را مختصر کنید

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}$$

حل  $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a+1}{a}}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{a+1}} = \frac{1}{\frac{a+1+a}{a+1}} = \frac{a+1}{2a+1}$

سند - کسر مسلسل ذیل را ساده کنید :

$$\frac{x^r}{1 - \frac{1}{x^r + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}}$$

حل - کسر فوق را مرتباً چنین می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} \frac{x^r}{1 - \frac{1}{x^r + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}} &= \frac{x^r}{1 - \frac{1}{x^r + \frac{1}{x} \times \frac{x}{x^r+1}}} = \frac{x^r}{1 - \frac{1}{x^r + \frac{1}{x^r+1}}} \\ &= \frac{x^r}{1 - \frac{1}{\frac{x^r+x^r+1}{x^r+1}}} = \frac{x^r}{1 - \frac{x^r+1}{x^r+x^r+1}} = \frac{x^r}{\frac{x^r+x^r+1}{x^r+x^r+1}} \\ &= x^r \cdot \frac{x^r}{x^r+x^r+1} = \frac{x^r+x^r+1}{x^r} \end{aligned}$$

سند تحقیق کنید که :

$$\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x-1}, \quad \frac{1 + \frac{b}{a-b}}{1 - \frac{b}{a+b}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}} = \frac{ad+bc}{ad-bc}, \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{y+x}{y-x}$$

$$\frac{x + \frac{a^r}{x^r}}{x - \frac{a^r}{x^r}} = \frac{x^r}{x^r - a^r}, \quad \frac{a + \frac{1}{a}}{a - \frac{1}{a}} = \frac{a^{r+1}}{a^r - 1}$$

$$\frac{1 - \frac{y^r}{x^r}}{1 + \frac{y^r}{x^r}} = \frac{x^r - y^r}{x^r + y^r}, \quad \frac{\frac{a}{a-x} - \frac{a}{a+x}}{\frac{x}{a-x} + \frac{x}{a+x}} = 1$$

$$\frac{a(a-b) - b(a+b)}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}} = a^r b^r, \quad \frac{1 - \frac{x(1-y)}{x+y}}{1 + \frac{1-y}{x+y}} = y$$

$$\frac{\frac{ra-ab}{ra+ab} + \frac{ra+ab}{ra-ab}}{\frac{ra+ab}{ra-ab} - \frac{ra-ab}{ra+ab}} = \frac{ra^r + rab^r}{ra^r b^r} \cdot \frac{\frac{a^r}{x^r} + \frac{a}{x} + 1}{\frac{b^r}{x^r} - \frac{b}{x} + 1} = \frac{a^r + ax + x^r}{b^r - bx + x^r}$$

$$\frac{\frac{a^r+b^r}{a^r-b^r} \cdot \frac{a^r-b^r}{a^r+b^r}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}} = \frac{ab}{(a^r+b^r)}$$

$$\frac{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}}{x^r - y^r} = (x-y)(x+y) = xy^r$$

$$\frac{1 + \frac{x}{1+x}}{x + \frac{1}{1+x}}; \quad \frac{(x+1)^r - x^r}{x^r(x+1)} = 1, \quad \frac{\frac{a^r+b^r}{a^r-b^r}}{\frac{a^r-ab^r+b^r}{a-b}} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}}{\frac{a^r-(b-c)^r}{a}} = \frac{1}{bc(b-a-c)}$$

$$\frac{\frac{x}{1+x} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{x-1}} = x$$



$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}} = \frac{b+c-a}{a+c-b}$$

$$\left[ \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] : \left[ \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] = \frac{x^r}{1-x^r}$$

$$\frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{x}{ab})(a+b+x)}{\frac{1}{a^r} + \frac{1}{b^r} + \frac{x}{ab} - \frac{x^r}{a^r b^r}} = ab$$

$$\frac{rabc}{bc+ac+ab} - \frac{\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = 1$$

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1} - \frac{1 + \frac{b}{a} + \frac{b^r}{a^r}}{\frac{a}{b} + \frac{b^r}{a^r}} = \frac{a^r - rab^r - rb^r}{a^r + b^r}$$

$$\frac{x+y}{xy} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) + \frac{y+z}{yz} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) + \frac{x+z}{xz} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^r + \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right)^r + \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)^r - \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \times$$

$$\left( \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) = r$$

$$\frac{1}{x - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}} = \frac{x^{r+1}}{x^r}, \quad \frac{1}{a-b + \frac{1}{a - \frac{1}{b}}} = \frac{ab-1}{x^r b - ab^r - a + rb}$$

$$\frac{1}{x - \frac{1}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{r}{1 - \frac{1}{x^r}} = \frac{x^r}{1-x^r}$$

$$\frac{rx^r - r}{x-1 - \frac{1}{1-x}} = r(rx+1), \quad 1 + \frac{x}{1+x + \frac{rx^r}{1-x}} = \frac{1+x}{1+x^r}$$

$$\frac{\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc}}{1 - \frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}} = \frac{a-c}{1+ac}$$

$$\frac{\left[ \frac{x^r - y^r}{x^r + y^r} \times \frac{x^r - y^r}{x^r + y^r} \times \left( \frac{1}{x^r} + \frac{1}{y^r} \right) \right] : \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)}{\frac{(x+y)^r - xy}{(x-y)^r + xy}} = \frac{x-y}{xy}$$

$$\frac{(b+c)^r + r(b^r - c^r) + (b-c)^r}{(b^r - r b^r c^r + c^r) \left[ \frac{1}{(b-c)^r} + \frac{r}{b^r - c^r} + \frac{1}{(b+c)^r} \right]} = 1$$

$$\frac{r - rx}{rx - r - \frac{rx}{1 + \frac{rx-1}{1 + \frac{1}{rx-1}}}} = - \frac{r - rx}{rx^r - rx + r}$$

$$\left[ \frac{\frac{1}{x^r} + \frac{1}{y^r}}{\frac{1}{x^r} - \frac{1}{y^r}} - \frac{\frac{1}{x^r} - \frac{1}{y^r}}{\frac{1}{x^r} + \frac{1}{y^r}} \right] : \frac{1}{\left( \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) \left( \frac{x^r}{y^r} + \frac{y^r}{x^r} - r \right)} = -1$$

$$\frac{4x^r y^r}{m+n} : \left[ \frac{rx(m-n)}{r(z+s)} : \left\{ \frac{r(z-s)}{rxy^r} : \frac{z^r - s^r}{r(m^r - n^r)} \right\} \right] = \frac{rr}{r}$$

$$\frac{\left[ \frac{(a+b)^r}{rab} - 1 \right] \left[ \frac{(a-b)^r}{rab} + 1 \right]}{(a+b)^r - ra^r b - rab^r} \times \frac{[(a+b)^r - ab][(a-b)^r + ab]}{(a-b)^r + rab(a-b)} \times$$

$$\left[ \left( \frac{a^r + b^r}{a^r - b^r} - \frac{a^r - b^r}{a^r + b^r} \right) : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) \right] = \frac{a^r - b^r}{rab(a^r + b^r)}$$

$$\frac{x^r}{1 - \frac{1}{\frac{1}{x}}}} + \frac{x^r}{1 - \frac{1}{\frac{1}{x}}}} = rx^r$$

## منطق کردن محسوس کسور

اغلب برای اختصار لازم می شود که وقتی مخرج کسری عبارت از جذبی است  
آن کسر را بکسر دیگری که مخرجش منطق باشد تبدیل کنیم و برای اینکار  
باید صورت و مخرج کسر منفرد را در عبارت ضرب کرد که حاصل ضرب  
مخرج در آن عبارت عبارت منطق گردد.

مسئله ۱- کسری  $\frac{p}{\sqrt{q}}$  را بکسری که مخرجش منطق باشد تبدیل کنید  
حل - واضحست که  $\sqrt{q} \cdot \sqrt{q} = q$  پس کافیست صورت و مخرج آنرا

در  $\sqrt{q}$  ضرب کنیم نتیجه می شود  $\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{p\sqrt{q}}{q}$   
مسئله ۲- کسر معادل  $\frac{p}{\sqrt{q}}$  چنان تعیین کنید که مخرج عبارت منطق باشد

حل - کافی است صورت و مخرج را در  $\sqrt[3]{q}$  ضرب کنیم  
مسئله ۳ کسری  $\frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$  را بکسری که مخرجش منطق باشد تبدیل کنید  
حل - از ملاحظه قضیه نمره ۵۷۱ معلوم می شود که باید صورت و مخرج

در مزدوج محسوس یعنی  $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$  ضرب کرد.

مسئله - تحقیق کنید که

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad , \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \quad , \quad \frac{r}{\sqrt{r}} = \frac{r\sqrt{r}}{r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}-\sqrt{r}} = \sqrt{r}+\sqrt{r} \quad , \quad \frac{a}{\sqrt{r}-1} = a(\sqrt{r}+1)$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad , \quad \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a^2+b+2ab}{a^2-b}$$

$$\frac{r}{\sqrt{r}-\sqrt{b}} = \sqrt{r}+\sqrt{b} \quad , \quad \frac{\sqrt{r}+\sqrt{r}}{\sqrt{r}-\sqrt{r}} = 0+1\sqrt{b}$$

$$\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1} = \frac{r+\sqrt{b}}{r} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} = \sqrt{a+1}+\sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}+a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{b}+a} = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}-ab}{b-a^2} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\frac{\sqrt{r}+r}{\sqrt{r}+r} = \sqrt{r}+r-\sqrt{r}-\sqrt{r} \quad , \quad \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m}$$

$$\frac{ra\sqrt{r}}{r-\sqrt{r}} = a(r+\sqrt{r}) \quad , \quad \frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{c\sqrt{a^{m-1}}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \quad , \quad \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{r}+\sqrt{r}-\sqrt{b}}{\sqrt{r}+\sqrt{r}} = 1+\sqrt{b}(\sqrt{r}-\sqrt{r})$$

$$\frac{1+\sqrt{r}+\sqrt{r}}{\sqrt{r}-\sqrt{r}} = -(\sqrt{r}+\sqrt{r}+1\sqrt{b}+0)$$

$$\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{r(a^2-b)}{a^2+b} \quad , \quad \frac{1}{i} = -i$$

$$\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{b-a}} = i$$

۶۶- همیشه از اینکه یک مرتبه صورت و مخرج را در هر دو ج مخرج ضرب کنیم استفاده می‌کنیم.

نمی‌شود بلکه باید چندین مرتبه اعمال مختلفه مجری داشت و حل جبری  
بکار برده و چنانکه ذیلاً مشاهده می‌شود

مسئله - کسر مساوی  $a = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$  تقسمی نموده کنید که مخرج منطقی باشد

حل - موافق مسئله اول  $a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$  و موافق مسئله سوم

$$a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}}{2}$$

مسئله - کسر  $x = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$  را بواسطه منطقی کردن مخرج ساده کنید

حل - در کسر منفرجه و ضرباً بطریق ذیل عمل میکنیم :

$$x = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-5}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

مسئله - کسر  $x = \frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$  را مختصر کنید

حل - واضحست که  $\text{مخرج} = 5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$

$$= 5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2} = \sqrt{3}+\sqrt{2} \text{ پس :}$$

$$x = \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = (3+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

مسئله - کسر  $Q = \frac{p}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$  را بجبری که مخرج منطقی باشد تبدیل کنید

حال - میدانید که ؟ (۲۰۱)

$$x - y = \frac{x^n - y^n}{x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}}$$

حال اگر در این دستور جای  $x$  و  $y$  بر حسب  $\sqrt[n]{a}$  و  $\sqrt[n]{b}$  قرار دهیم

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}} \quad \text{حاصل می شود}$$

$$Q = \frac{P(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}})}{a - b} \quad \text{پس:}$$

سند - تحقیق کنید که :

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{12}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{30}(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{11})}{90}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{11} + \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{11} - \sqrt{12})}{24}$$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{15}}{12}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)[a + b - 1 - 2\sqrt{ab}]}{a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b + ab)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}} = \frac{2\sqrt{b} + 3\sqrt{a} - \sqrt{a^3}(2+b)}{2ab}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{12} + \sqrt{21}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{4}$$



$$\frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{3})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{1} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(5 - \sqrt{2})}{23}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} = \frac{1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = (\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5} + 2)$$

مسئله - کسر  $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$  را تبدیل کنید  
 طریق حل - باید اتحاد ذیل را استعمال کرد :

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

مسئله - ثابت کنید که اگر  $\alpha\delta = \beta\gamma$  باشد تساوی ذیل برقرار است

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{(\gamma - \delta)(\alpha - \beta)}$$

مسئله - صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید .

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

استعمال  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  را به مجموع دو رادیکال تبدیل کنید .

حل - در این مثال  $a=3$  ,  $b=8$  پس

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}} = \sqrt{2}+1$$

مسئله - رادیکالهای ذیل را بحسب دو رادیکال تبدیل کنید

$$\sqrt[3]{5-\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{10\sqrt{2}-27}{2}}$$

$$\sqrt[3]{19\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{3}}$$

(بنویسید مسئله تفریکی)

سه نفر هر یک یکی از شیئی مختلف را برداشته اند معلوم کنید هر یک کدام یک از اشیاء را تصرف کرده اند

« برای سهولت سه نفر را بترتیب اولی و دومی و سومی و سه شیئی مفروض را

بترتیب شیئی اول و شیئی دوم و شیئی سوم نامیده و آنها را بترتیب

بحروف  $a, e, d, o, m$  بنمایم »

۲۲ شک ریزه و مهره برداشته یکی باولی و دو عدد دومی و

سه عدد سومی بدید و با آنها را کنید که در غیاب شما هر یک یکی

از شیئی متعین را بردارند بعد با آنکه شیئی اول را برداشته بگویند

باندازه سنگریزه یا مهره یا نیکه با و داده اید از ۸ سنگریزه یا مهره

که مانده است بردارد و باید ششی دوم صرف کرده اگر کسید باز از هفت  
 عده سنگریزه یا مهره مانیکه با دو داده اید بردارد و بالاخره برومی گویند  
 چهار برابر عده مهره مانیکه با دو عطا کرده اید از بقیه سنگریزه یا مهره  
 ا صرف کند

اکنون باید از عده سنگریزه یا مهره مانیکه بمانده فهمید که هر یک از  
 ششی را که ام یک برداشته اند برای اینکار معین کنید می گویند که در  
 هر یک از حالات مختلفی که ممکن است دوی و د چند سنگریزه یا مهره  
 می ماند بدیهی است که بر حسب اینکه اولی و دومی و سومی به نام  
 مختلف ریشی را صرف کنند شش صورت ذیل رخ میدهد

سومی	دومی	اولی	سومی	دومی	اولی	سومی	دومی	اولی
e	z	a	z	a	e	z	a	e
a	e	z	a	e	z	a	e	z

و حالات اول - مهره مانیکه برداشته میشود عبارت است از

$$16 = 1 + 2 \times 2 + 4 \times 3 \text{ پس } 16 - 1 = 15 \text{ مهره دیگر بماند}$$



در حالت دوم  $۱۶ = ۲ \times ۴ + ۲ \times ۱ + ۲ \times ۱$  مره برداشته و بنا بر این

$۱۸ - ۱۶ = ۲$  مره دیگر مانده است و بهین قسم معلوم میشود که در هم حالت

دیگر ترتیب ۳ و ۵ و ۶ و ۷ مشهور میباشد. خلاصه این مطالب اینها

باین صورت نمود

باقیمانده	اولی	دومی	سومی
۱	a	e	i
۲	e	a	i
۳	a	i	e
۵	e	i	a
۶	i	a	e
۷	i	e	a

برای اینکه این مطالب بخوبی در حافظتان بماند کافی است عبارت ذیل را بخاطر

ببایرید.

*Parfer, Cesar, padis, devint le grand prince*

وقتی بابت مره بماند باید دو کلمه اول یعنی *parfer* را بخاطر بیاورید

چون حرف *a* اول و حرف *e* در مرتبه دوم قرار دارد معلوم میشود اولی

ثانی اول و دومی ششم و دومی ششمی دیگر را برداشته است و پس علمید در سایر حالات

## فصل نسبت و تناسب - مسائل مختلفه

تعریف ۶۷ - خارج قیمت و عدد را نسبت آنها خوانند مثلاً  $\frac{a}{b}$  نسبت

و مقدار  $a$  و  $b$  و ۲ نسبت ۲۲ و ۱۴ است صورت مقدم و مخبر را

تالی خوانند چون نسبت کسرهاست جمع قواعد یکدیگر بقسطن میگرفت و بر

نسبت نیز جاری است .

۳ - مسأله - مطلوب است نسبت  $(\frac{2}{3} : \frac{1}{4})$  و  $(\frac{1}{2} : \frac{1}{3})$  و  $(\frac{1}{4} : \frac{1}{5})$

(جواب ۱۰ و  $\frac{3}{4}$  و ۲)

مسأله - نسبت ۱۲ : ۵ را بنیستی تبدیل کنید که مقدرش واحد باشد

طریق حل - دو جمله نسبت را پنج تقسیم کنید حاصل شود  $\frac{12}{5} = ۱۲ : ۵$

مسأله - نسبت ۱۲ : ۲ را بنیستی تبدیل کنید که مقدرش واحد باشد (جواب  $\frac{1}{3}$ )

مسأله - نسبت  $\frac{5}{6}$  را بنیستی تالیش  $c$  باشد تبدیل کنید (جواب  $c : \frac{5c}{6}$ )

مسأله - اگر قدنی ۵ و قران چانی سیری ۵ را قران باشد نسبت

کمین قد و کمین چای چند است (جواب  $\frac{17}{13}$ )

تعریف ۶۸ - بیان تساوی دو نسبت آنرا تناسب خوانند مثلاً تساوی

$\frac{1}{5} = \frac{16}{8}$  تناسب است . جمله اول و آخر تناسب طریق و جمله







برای اثبات کافی است طرفین تساوی  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  را در  $bd$  ضرب کنیم حاصل می‌شود:  $ad = bc$

۲- مسند - کدام یک از دو تناسب  $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$  و  $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$  صحیح است؟  
 حل - تناسب اول صحیح نیست زیرا حاصل ضرب طرفینش  $63$  و حاصل ضرب وسطینش  $16$  است اما تناسب دوم صحیح است زیرا حاصل ضرب طرفین و حاصل ضرب وسطین هر دو مساوی  $36$  هستند.

۳- مسند - کدام یک از تناسب‌های ذیل صحیحند:  $\frac{9}{5} = \frac{3}{2}$  و  $\frac{2}{15} = \frac{3}{5}$

$$\frac{7}{4} = 2 \text{ و } \frac{2}{9} = \frac{1}{4.5} \text{ و } \frac{3}{4} = 5 \text{ و } \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

(جواب فقط دو تناسب پنجم و ششم صحیح است)

مسند - ثابت کنید که اگر  $x$  واسطه هندسی  $a$  و  $b$  باشد

$$ab = x^2 \text{ است}$$

مسند - مطلوب است چهارم جزر تناسب  $3$  و  $20$  و  $5$

حل - اگر  $x$  چهارم جزر تناسب  $5$  و  $20$  و  $3$  باشد  $\frac{5}{3} = \frac{x}{20}$  یا

$$5x = 60 \text{ پس } x = \frac{60}{5} = 12$$

مسند - چهارم جزر تناسب  $2$  و  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{9}$  را تعیین کنید (جواب ۲۱)

مسئله - مطلوب است سوم جز تناسب (۶۹) یا (۱۰۰) (۱) (جواب ۴، ۱۲)

مسئله - اگر  $2x = 5$  باشد نسبت  $x$  و  $y$  چقدر است (جواب  $\frac{5}{4}$ )

مسئله - مطلوب است واسطه هندسی  $a$  و  $\frac{a}{\sqrt{v}}$  (جواب  $a$ )

مسئله - ثابت کنید که از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  تناسباتی دیگر می‌شود

$$(۱) \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (۲) \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad (۳) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(۴) \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (۵) \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (تفصیل نسبت)$$

$$(۶) \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

اثبات این قضایا بسیار سهل است مثلاً برای اثبات دستور (۴) کافیست

یکواحد بطرفین تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  افزودن و سپس کنیم و نیز برای اثبات دستور

(۵) کافی است که طرفین تساوی (۴) را بطرفین تساوی (۵) :

تقسیم نماییم و پس غلیظا الی آخر

مسئله - بنا بر آنکه  $\frac{x}{x+15} = \frac{4}{7}$  باشد  $x$  را حساب کنید

حل - موافق دستور (۱) تناسب فوق را باین شکل می‌نویسیم :

$$\frac{x}{x+15} = \frac{4}{7} \quad \text{یا پس از تفصیل نسبت} \quad \frac{7}{4} = \frac{x+15}{x} \quad \text{پس} \quad x = 20$$

مسئله - در هر یک از تناسبات ذیل مقدار  $x$  را حساب کنید :



$$\frac{w}{r} = \frac{1+x}{x}, \quad r1:r1=r2:rx, \quad \frac{a}{x} = \frac{11-x}{x}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{a+x}{x} \quad \frac{a+b}{a-b} = x: \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right), \quad r1:r2 = x:(r+x)$$

$$\frac{v}{x+r} = \frac{1}{x-r}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a+x}{a}, \quad \frac{a+b}{a} = \frac{x+n}{x}$$

$$rx:ax = \frac{x}{11-x}, \quad \frac{r}{r} = \frac{r+x}{r-x}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{a+x}{a-x}$$

جواب ترتیب  $\frac{a(a-b)}{b}, \ln, r, \frac{a+b}{ab}, r2, r, v, \frac{a}{b}$

$8, \frac{r}{a}, b, r$

مسئله - بنا بر آنکه  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$  و  $x-y=6$ ،  $x$  و  $y$  را حساب کنید

طریقی عمل - تناسب اول را میتوان چنین نوشت:  $\frac{x-y}{y} = \frac{a}{b}$  یا  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + 1$

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$  یا  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + 1$  (جواب ۱۵ و ۹)

مسئله - از مقادیر  $x$  و  $y$  را بدست آورید

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} & x=r \\ x+y=10 & y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} & x = \frac{rab}{a+b} \\ x+y=ab & y = \frac{rbr}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{m+n}{m-n} & x=m+n \\ x+y=2m & y=m-n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{m^r - n^r}{m^r + n^r} & x = m^r - n^r \\ x+y=2m^r & y = m^r + n^r \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{(a+b)^r}{(a-b)^r} y & x = \frac{ab(a+b)^r}{a^r + b^r} \\ x+y=2ab & y = \frac{ab(a-b)^r}{a^r + b^r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x^r - y^r} = \frac{b}{a(b^r - 1)} & x = ab \\ x+y=a(b+1) & y=a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(a-b)x}{(a+b)y} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \\ x-y = 2ab \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= a^2 + ab + b^2 \\ y &= a^2 - ab + b^2 \end{aligned}$$

سند - ثابت کنید که اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$  باشد:

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

طریق اثبات - باید ملاحظه کرد که اگر مقدار نسبت مشترک را  $r$  بنامیم

$$a+c+e+\dots = r(b+d+f+\dots), \quad e=fr, \quad c=dr, \quad a=br$$

اتمام بر متعلم است

مسئله - بنا بر آنکه دست سی ۱۰۶۷ کیلومتر و فرسخ بحری ۵۵۵۷ متر باشد

نسبت طول دو قطعه که طول یکی  $\frac{۵}{۲}$  دست و طول دیگری  $\frac{۲}{۵}$  فرسخ بحری

باشد چقدر است (جواب: تقریباً ۸/۱۰)

مسئله - سه طول  $a$ ,  $b$ ,  $c$  مفروض است پیدا کنیم که  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\frac{b}{c} = \frac{1}{15}$  تعیین کنید اندازه  $a$  را وقتی واحد فرض شود

(جواب  $\frac{۲}{۱۵}$ )

مسئله - چهار نقطه  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  تقسیمی بر خط  $xy$  است اگر گفته اند

که  $AC=۲۱$ ,  $CB=۱۵$ ,  $BD=۹۰$  تحقیق کنید که اولاً  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$  و ثانیاً

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{CB} - \frac{1}{BD} \quad \frac{1}{CD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BD} = \frac{1}{CB} - \frac{1}{AC}$$



رابطه اگر  $O$  وسط  $CD$  باشد  $OA^2 = OC \cdot OD$  و  $MC^2 = MA \cdot MB$

مسئله مطلوب است محاسبه مجموع مربعات  $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$  و  $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$  و  $\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{2}$

(جواب)

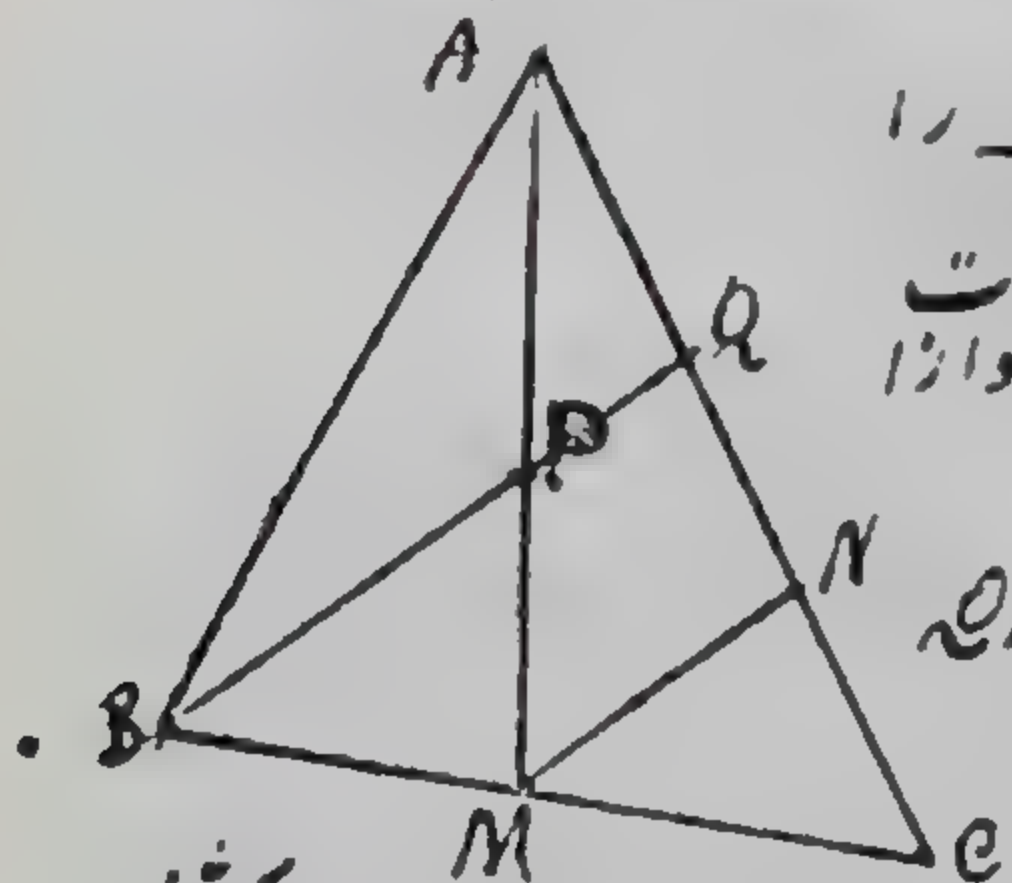
مسئله - فرض کنیم  $M$  میانه مثلث  $ABC$  باشد. رأس  $B$  را بر خط

$AM$  یعنی  $P$  وصل می کنیم و خط  $BP$  را امتداد می دهیم تا  $AC$  را در

نقطه  $Q$  تقاطع کند حساب کنید  $\frac{AQ}{QC}$  را

طریق اثبات - از نقطه  $M$  خط  $MN$  را بواژه

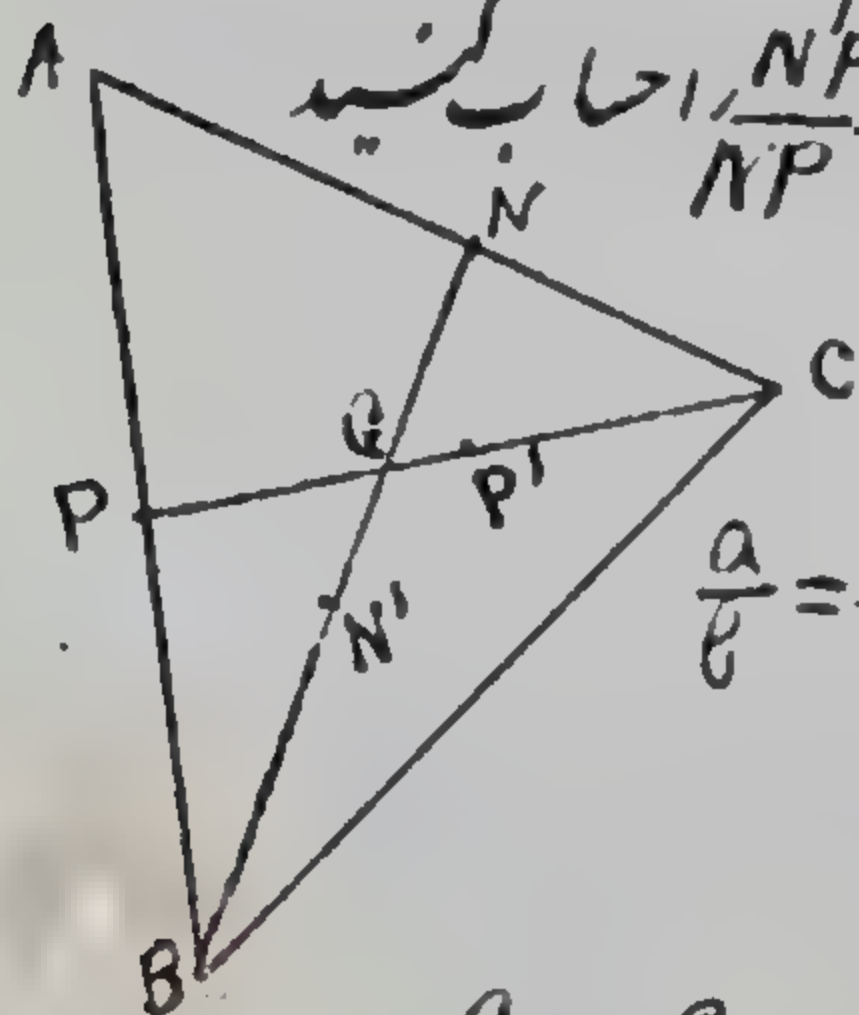
$BQ$  رسم نموده ثابت کنید  $QA = QN = NC$



اتمام برشعظم است (جواب  $\frac{1}{3}$ )

مسئله - فرض کنیم  $CP$  و  $BN$  میانهای مثلث  $ABC$  و  $P'$  و  $N'$  وسط آنها

مقدار نسبت های  $\frac{GP'}{GC}$  و  $\frac{GN'}{GB}$  و  $\frac{N'P'}{NP}$  و  $\frac{N'P'}{BC}$  را حساب کنید



جواب  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{3}$

مسئله - ثابت کنید که از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

تناسبات ذیل نتیجه میشود :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{am - cn + ep}{bm - dn + fp}$$



$$\sqrt[m]{\frac{a^m - c^m + e^m}{b^m - d^m + f^m}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

مسئله - مجموع و نسبت دو عدد معلوم است آن دو عدد را تعیین کنید.  
جواب - اگر  $x$  و  $y$  اعداد مطلوب در مجموع و نسبت آنها باشد:

$$x = \frac{16}{x+1}$$

$$y = \frac{1}{x+1}$$

مسئله - مطلوب است محاسبه خارج قسمت ذیل:

$$\frac{xy^2(1 + \frac{x}{y} + \frac{a}{x} - \frac{r}{xy^2}) - ra(1 + \frac{x}{y} - ry + \frac{xy}{ra})}{xx(\frac{a}{x} + 1) + rax(\frac{1}{a} + \frac{1}{x})}$$

جواب ۱ -  $xy - 1$

مسئله - ثابت کنید که اگر  $\frac{x}{t} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  باشد  $\frac{a}{y} = \frac{a^r}{b^r}$

مسئله - بنا بر آنکه  $\frac{x}{y} = \frac{a^r}{b^r}$  و  $y - x = c$  باشد  $x$  و  $y$  را حساب کنید

$$y = \frac{b^r c}{b^r - a^r} \quad \text{جواب}$$

مسئله - مطلوب است خارج قسمت تقسیم

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 \quad \text{بر} \quad x^2y^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

جواب ۱ -  $xyz + 1$

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید:

$$\left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(\frac{x^2y^2}{xy + y^2}\right) \left(\frac{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}{x^2 - 2x^2y + xy^2}\right)$$

مسئله - ثابت کنید که  $n^3 - n$  همیشه به ۳ قابل قسمت است

مسئله - ثابت کنید که اگر  $x+y=a$  و  $xy=b$  باشد درابطه ذیل محقق است

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2-2b \\ x^3+y^3=a^3-3ab \\ x^4+y^4=a^4+2b^2-4ab^2 \\ x^5+y^5=a^5-5a^3b+5ab^2 \end{cases}$$

مسئله - ثابت کنید که اگر  $ab+bc+ca=0$  یا  $(a+b)(b+c)(c+a)=0$

$$abc=0 \text{ است}$$

مسئله - کر  $\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$  مفروض است. اولاً مطلوب است

مقدار عددی آن بازا  $a=\sqrt{3}$ ,  $b=\sqrt{9}$ ,  $c=\sqrt{16}$  یا  $A$  را غیر

ممکن التحویل کنید (جواب: مقدار عددی:  $A=a+b+c=10$ )

مسئله - بنا بر آنکه  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  و  $a^x : a^y = a^{x-y}$  باشد مقدار عبارت ذیل را

$$\frac{4x^3y + x^3 - y^3 + x^2y^2(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4 - x^2y^2(x^2 - y^2)}$$

مسئله - اگر  $\frac{a}{3} = \frac{4}{5}$  و  $\frac{b}{8} = \frac{3}{5}$  باشد نسبت  $a$  به  $b$  را تعیین کنید

$$( \text{جواب } \frac{12}{35} )$$

مسئله - عبارت  $4(3a-x)^2 - 9(2a-x)^2$  را حاصل ضرب عوامل

تجزیه کنید  
جواب  $x(5x-12a)$

مسئله - مطلوب است کم  $(9x^2-16y^2)$  و  $9x^2-16y^2$  را  $3x+4y$

(جواب  $(ax^2 - 16y^2)^2$ )

$3x - 4y$

مسئله - ثابت کنید که از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  نتایج ذیل نتیجه میشود:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{c}{d}, \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}, \frac{ca^2 - b^2}{ac^2 - d^2} = \frac{b}{d}, \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{ac + bd} = b : d$$

مسئله - ثابت کنید که اگر  $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{b^2 + d^2} = \frac{c^2 + d^2}{b^2}$  باشد نسبت  $a, b$  مثل نسبت  $c, d$  استمسئله - فرض کنیم  $A = x^2 + 2x - 1$ ,  $B = 2x^2 - 5x + 6$ ,  $C = 2x^2 - x - 1$  $E = x^2 - 4x + 9$ ,  $D = x^2 - 6x + 11$  مطلوب است مقدار عددی  $A$  باز $x = -1 + \sqrt{2}$  و مقدار  $B$  باز  $\frac{5 + \sqrt{-23}}{6}$  مقدار  $C$  باز۱- و مقدار  $D$  باز  $3(1 + i)$  و مقدار  $E$  باز  $2 - 2\sqrt{5}$ 

(جواب ۵)

مسئله - تحقیق کنید که:

$$\frac{(x^a)^r}{x^{b+c}} \times \frac{(x^b)^r}{x^{c+a}} \times \frac{(x^c)^r}{x^{a+b}} = x^{a+b+c}$$

$$\left( \frac{\sqrt{x}}{y^{-13}} \times \frac{\sqrt[4]{y}}{x^{\frac{1}{6}}} \right) : \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{7}{12}} y^{\frac{17}{4}}$$



$$\left[ \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^{\frac{1}{4}} - \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{[(x+a)^2 - ax]^{\frac{1}{4}}} = \frac{2x}{\sqrt{x+a}}$$

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} l^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}} + (l^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} l^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{2}} + l^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

فرض کنید  $l^{\frac{1}{4}} = y$ ،  $a^{\frac{1}{4}} = x$

مسئله - مطابق مقدار  $\frac{2x\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$  بازا  $x = \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{a}{l}} - \sqrt{\frac{l}{a}})$

(جواب  $a+l$ )

مسئله - حساب کنید مقدار  $x^3 + 3x + 2$  را بازا  $x = (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$

(جواب  $0$ )

بیشترین مسئله تفریحی

با ۱۴ ورقه گنجه ساعتی را که فردا صبح بیدار شوید شما

میگویم!

۱- با چهار ورقه شکل ذیل را که صفحه ساعت است تئیس دهید و برای آنکه



ناظرین متوجه نشوند که این اوراق یک صفحه ساعت تشکیل میدهند مژه و ورق را  
نظر گرفته و همه را برگردانید و اضمحلت که در این صورت مژه هر یک از  
ورقها را میدانید

۲- شخصی اگر بخواهد ساعتی که میخواهد فردا صبح بیدار شود خیال کرده ضمناً  
انگشت خود را روی یکی از این اوراق بگذارد

۳- اگر بخواهد که از آن ورق شروع کرده ساعات متوالی را از ساعتی که  
خیال کرده برخلاف جهت حرکت عقربه های ساعات تا عددی که شما تعیین  
میکنید بشمارد (این عدد را باید با این طریق بدست آورد که انگشت خود را  
روی آن گذارد و یکی از مضارب دوازده را اضافه کند) ورقی را  
که بر روی آن وقف کرد ساعتی است که خیال کرده مثلاً اگر ساعت پنج را  
خیال کرده و انگشت خود را روی هفت گذارد باید پیش خود اعداد  
۵ و ۶ و ۷ ... را بشمارد و لی انگشت را روی ۸ و ۹ و ۱۰ ... بگذارد

باید باین ترتیب تا ۱۲+۷ یا ۲۴+۷ یا ۳۶+۷ ..... و غیره  
بشمارد

این مسئله که بسیار جالب توجه است بحالت خاصی از مسئله ذیل میباشد

مسئله - از بین چند عدد که سکت شروع شده و بر محیط دایره قرار گرفته اند کدام را خیال کرده اند ؟

مسئله - فرض کنیم دایره ذیل را که اعداد طبیعی از یک تا ده بر محیط آن قرار گرفته اند

۱۰      ۲  
۹      ۳  
۸      ۴

و فرض کنیم شخصی حدود را خیال کرده باشد بگوید انگشت خود را بر روی یکی از اعداد دایره فوق بگذارد مثلاً فرض کنیم این عدد باشد. برای اینکه از ۸ به برسیم باید بگوئیم ۸ و ۷ و ۶. حال اگر بان شخص امر کنیم ۸ و ۷ و ۶ را بشمارد اما بجای اینکه بگوید ۸ و ۷ و ۶ بگوید ۷ و ۶ و ۵ رقی را که بر روی آن متوقف میشود یعنی عددی است که خیال کرده و بدیهی است که اگر بر عدد ۸ یک یا چند ده علاوه کند و بر ترتیب فوق از ۷ تا عدد حاصل بشمارد همیشه میرسد.



## نهمین مسئله تفریحی

چگونه ریاضی دان غالب شود ؟

شخصی عددی کوچکتر یا مساوی عدد متین  $a$  میگوید . دیگری عددی کوچکتر یا

مساوی  $a$  بر آن منفراید . بعد اولی عددی موافق همان شرط بحاصل

افزوده میکند و قرص عینده الی آخر . هر کس زودتر بعد  $n$  که قبلاً متین کرده

رسید باز بر دست . میخواهیم بدانیم آنکه باز بر آید و ع میکند چه کند

تا همیشه غالب باشد ؟

حل - واضحست که اگر اولی زودتر به  $a - n$  برسد دومی همیشه

بگوید باخته است زیرا اگر اولی زودتر به  $2 - a - n$  یا  $3 - a - n$

و .... و غیره برسد دومی باز بر خواهد باخت پس مترقبه اولی بسیار

سهل است :

باید قسمی رفتار کند که اعدا دیر که متواین میگویند متباجل سند فوق باشند

مثال - میخواهند به عدد ۷۵ برسند بنا بر آنکه میچیک نتوانند از ۱۰

تجاوز کنند ۱۰ اعدا دیر که شروع کننده باید بخاطر بسیار و جارتند از :

شد فرض کنیم اولی بگوید ۲ (عددی کوچکتر از ۴) دومی هر عددی که به ۲ منفرزاید نمیتواند به ۱۵ برسد مثلاً اگر ۸ به ۲ منفرزاید حاصل میشود آنوقت اولی میگوید ۱۵ و عمل را (مثلاً) بطریق ذیل امتداد میدهند

دومی                      اولی

۲۶

۲۵

۳۷

۳۰

۴۸

۴۰

۵۹ باز برابر است

۵۱

تبصره - کوچکترین جمله سلسله که باید شروع کنند در نظر داشته باشد

باقیمانده تقسیم  $n$  است بر  $a+1$  در مثال فوق باقیمانده تقسیم ۷۰ به

$11 = 10 + 1$  است ۴ است و برای بدست آوردن سایر جمله کافی است

اینجمله را به مضارب متوالی  $a+1$  بنفرزاییم و با اینملاحظه اعداد سلسله که

بتر بردن با ختن سلسله در آن است به سبب در نظر میآیند و نمیتوان ملاحظه

کرد که اعداد فوق جمله تصاعد عددی هستند که جمله آخرش  $n-a-1$  و قدر

نبتش  $a+1$  است

## دویمین سلسله تفریحی

میخواهید اسباب حیرت نظار را فراهم کنید؟

شخصی ۲۷ ورق گنجه برداشته یکی در مرتبه اول و یکی در مرتبه دوم و یکی در مرتبه سوم میگذارد و بعد مجدداً این عمل را تکرار میکند. (وقتی اوراق در دست آن شخص است روی آنها بطرف زمین است ولی وقتی آنها را بر زمین میگذارد آنها را بر میگرداند). در ضمن اینکه این شخص مشغول گستراندن اوراق است شخص دیگری یکی از آن اوراق را در نظر میگیرد و ما آنرا ورق منظور میخوانیم شخص اول پس از سؤال کردن دسته که ورق منظور در آن است اوراق را بدون برهم زدن جمع میکند و مجدداً مانند فوق آنها را به دسته تقسیم کرده دسته را که ورق منظور در آنست سؤال نموده و اوراق را جمع میکند و یک مرتبه دیگر آنها را بطریق فوق گسترده و دسته را که ورق منظور در آنست میپرسد. معلوم کنید در هر دفعه دسته را که ورق منظور در آنست در چه مرتبه بگذارد تا در دفعه سوم که اوراق را گسترانیده و مرتب کرد ورق منظور مرتبه را که قبلاً معین شده حائز باشد.

قاعده حل - سه نفر کنیم a, b, c مراتبی باشند که تدریجاً باید در دفعه اول



دوم و سوم دسته را که ورق منظور در آنست در آنها قرار ده و در آن مرتبه باشد

که باید این ورق از آن خارج شود و سهولت ثابت شود که  $R = 9(c-1) + 3(b-1) + a$

و از اینر قاعده ذیل برای تعیین  $a$  و  $b$  و  $c$  بدست میاید :

اولاً  $R$  را تقسیمی به تقسیم کنیم که در دفعه اول باقیمانده تقسیم صفر نباشد. این باقیمانده

$a$  خواهد بود

ثانیاً خارج قسمت را به تقسیم نموده باقیمانده یک واحد میفرایم  $b$  بدست میاید  
ثالثاً خارج قسمت جدید را به تقسیم نموده باقی یک واحد میفرایم  $c$  حاصل میگرد  
مثال ۱- میخواهیم ورق منظور چهاردهمی باشد :

$a=2$

۱۴	۳
۲	۴
	۱
	$b=2$
	۳
	۱
	$c=2$

یعنی باید دسته را که ورق منظور در آنست هر سه دفعه در مرتبه دوم قرار داد  
مثال ۲- میخواهیم ورق منظور بیست و نهمی باشد :

$a=3$

۹	۳
۳	۲
	۲
	$b=3$
	۳
	۰
	$c=1$

یعنی باید دفعات اول و دوم دسته را که ورق منظور در آنست در مرتبه سوم و دفعه سوم  
آنرا در مرتبه اول قرار داد (در مطبوعه علی بطین رسید) والسلام علی من التبع الهدی





فسمت اعظم کتاب در غیاب بنده بطبع رسیده است و توضیحات لازم  
 (از قبیل تصحیح و مقابله سند و غیره) در آن بعمل نیامده است لذا اغلاطی  
 چند در آن مشاهده می گردد که مجدداً مفقود و در غلط نام ذکر شده و  
 منتهی است قبل از فرائد آنها را تصحیح فرمایند

صفحه	سطر	غلط	صحیح	صفحه	سطر	غلط	صحیح
۴	۶	در حدود ثلث	۱۲۵	۱۴	۱۴	۹۷۹	۱۹۴۶
۱۵	۱۳	۰/۰۰۵۴۵۳۵ ۰/۰۰۵۴۱...	۱۲۶	۶	نسبت یکم	نسبت بقدر یکم	
۲۱	۴	در هر حالت یک	۱۲۱	۱۵	$dx+dl$	$Cx+dl$	
۲۷	۱۲	۲۸	۱۴۹	۱۴	تجزیه عبارت	تجزیه عبارت	
۶۳	۲	$x^2-2x^2+2x+1$	۱۶۴	۵	$+x^3$	$-x^3$	
۷۱	۴	$-a+b$	۱۹۷	۲	$fab$	$1fab$	
۹۶	۱۵	$(x^2-y)^2-c$	۲۰۰	۶	$\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}}$	$\sqrt{\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{6}}$	
۱۰۵	۲۲	$24x^2-...$	۲۰۰	۹	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2-5}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2-\sqrt{5}}$	
۱۲۲	۸	هر کثیر الحبله	۲۵۱	۱۲	$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}}$	
۱۲۳	۱۳	کثیر الحبله	۲۵۳	۴	$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$	$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$	







صفحه	سطر	غلط	صحیح	صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۰۵	۱۷	رتس علیها	رتس علیها و کبر	۲۰۸	۲	عدد عرش	عدد عرش
۲۰۸	۴	خوانند قتی که	خوانند که	۲۰۸	۱۴	بجای $\frac{۳}{۱۳}$ , ۴۱ نوشته شود	
۲۱۱	۵	$a_n$	$b_n$	۲۱۲	۹	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$ درست.

سطر ۷ صفحه ۴۱ و سطر ۱۱ صفحه ۴۳ زاید است.

در صفحه ۱۷۱ سطر ۷ بجای اعم در کثیر الحمله  $x^2 - 5x + 1$  و کثیر الحمله  $x^2 - 5x + 1$ .

$x^2 - 5x + 1$  بخوانید.





## \* (اعتذار) \*

طبع این کتاب بواسطه موانع غیر مترقبه که برای بنده پیش آمد مدتی بتأخیر افتاد کنایه هم که فعلاً با قشار آن نائل شده ام قسمتی از کتابی که در مقدمه وعده داده شده بیش نیست و اگر میخواستم هر دو قسمت را در یک جلد تقدیم نمایم عده صفحات آن از ۵۰۰ متجاوز شده و بالنتجه حجم کتاب از حد معمولی خارج میگردد لذا چاره بجز تقسیم کتاب اصلی بدو کتاب ندیدم. قسمت دوم این کتاب که شامل مطالب ذیل است تحت طبع و تالیف ماه دیگر منتشر خواهد گردید. از قارئین کرام امید عفو دارم.

غلامحسین فصاحب

## ( فهرست جلد دوم )

معادلات درجه اول - حل و بحث - معادلات حرفی و اصم حیل جبری و مسائل تفریحی دستگاه های درجه اول ( دو مجهولی و سه مجهولی و غیره ) مسائل درجه اول - حیل جبری و مسائل تفریحی - حل معادلات درجات عالیه ( دوم و سوم و غیره ) مسائل که در امتحانات مختلفه داده شده است. مسائل هندسی - معادلات سیاله و غیره